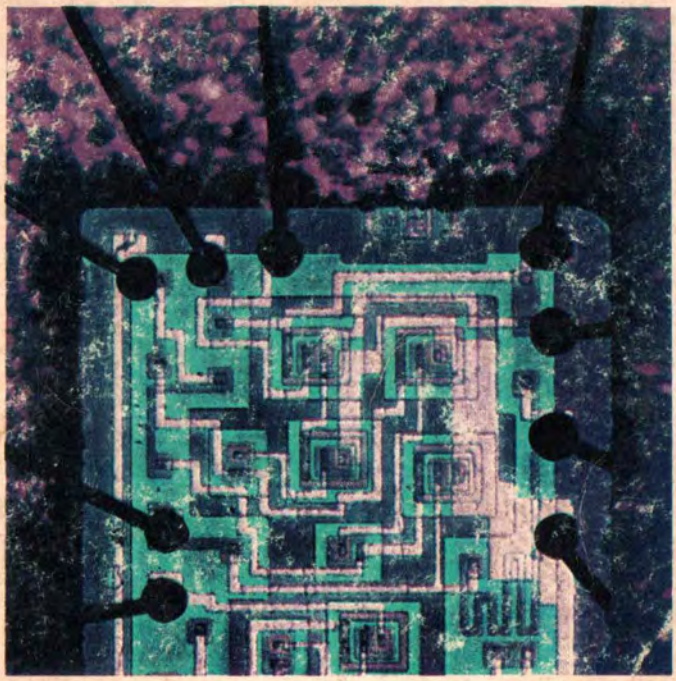


introducción a la economía cibernética

oskar lange

330.1
L274-i

veintiuno editores

2ª edición

economía
y demografía

DONACION

INTRODUCCION A LA ECONOMIA CIBERNETICA

por

OSKAR LANGE

preparado en colaboración con el doctor Antoni Banasinski, tomando como base las conferencias pronunciadas en la Universidad de Varsovia.

traducción de

MERCEDES ESCAMILLA DE KURTICZ

Edmundo Serani

siglo veintiuno editores

MEXICO
ESPAÑA
ARGENTINA
COLOMBIA

siglo veintiuno editores, sa
CERRO DEL AGUA 248, MEXICO 20, D.F.

siglo veintiuno de españa editores, sa
C/PLAZA 5, MADRID 33, ESPAÑA

siglo veintiuno argentina editores, sa

siglo veintiuno de colombia, ltda.
AV. 3a. 17-73 PRIMER PISO, BOGOTA, D.E. COLOMBIA

UNIVERSIDAD NACIONAL - BIBLIOTECA - Heredia, Costa Rica

330.1

911379

19 ABR. 1991

primera edición en español, 1969
segunda edición en español, 1977
© siglo xxi editores, s. a.

primera edición en polaco, 1965
© panstwowe wydawnictwo naukowe, varsovia
título original: wstep do cybernetyki ekonmicznej

derechos reservados conforme a la ley
impreso y hecho en méxico
printed and made in mexico

INDICE

PRÓLOGO 1

INTRODUCCIÓN. *Cibernética y economía* 3

CAPITULO PRIMERO. PRINCIPIOS GENERALES DE LA REGULACIÓN Y DEL CONTROL 14

§ 1. La regulación automática en la técnica 14
§ 2. Fórmula principal de la teoría de la regulación 21
§ 3. El multiplicador keynesiano 27
§ 4. La regulación y el control. Tipos de control 31
§ 5. Operadores lineales 39
§ 6. Interpretación cibernética de las operaciones en los operadores 46

CAPITULO II. ESQUEMAS CIBERNÉTICOS DE LA TEORÍA DE LA REPRODUCCIÓN 54

§ 1. Esquema de la reproducción simple 54
§ 2. Esquema de la reproducción ampliada 58
§ 3. El esquema multisectorial de la reproducción 62
§ 4. Forma matricial de las ecuaciones de balance de la distribución y de los gastos de producción 65

CAPITULO III. LA DINÁMICA DE LOS PROCESOS DE REGULACIÓN 69

§ 1. Interpretación dinámica del multiplicador keynesiano y del esquema de la reproducción 69
§ 2. La condición de convergencia de la matriz A^m 73
§ 3. La interpretación dinámica de la fórmula fundamental de la teoría de la regulación 74
§ 4. Un ejemplo del curso del proceso de regulación en el tiempo 78
§ 5. La dinámica del proceso marxista de reproducción 83
§ 6. Los esquemas de bloques de los procesos dinámicos 86
§ 7. La dinámica de la formación del precio de mercado 90

CAPITULO IV. LA TEORÍA DE LA ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DE REGULACIÓN 95

§ 1. Análisis general de la dinámica de los procesos de regulación 95
§ 2. La dinámica de los procesos continuos de regulación 99
§ 3. Los problemas prácticos de la regulación 103
§ 4. Un ejemplo: el problema de la reacción a los estímulos 108

CAPITULO V. ENFOQUE GENERALIZADO DE LA TEORÍA DE LA REGULACIÓN 117

§ 1. La ecuación de equilibrio del sistema 117
§ 2. Solución de la ecuación de reacción del sistema 127
§ 3. Ejemplo: el modelo del ciclo de coyuntura de Michal Kalecki 136
§ 4. Criterios de eficiencia de la regulación y de infalibilidad del funcionamiento de los sistemas 151

BIBLIOGRAFÍA 185

ÍNDICE DE NOMBRES CITADOS 189

ÍNDICE ANALÍTICO 190

PROLOGO

La aplicación de la cibernética a los problemas de la disección de los procesos económicos, es objeto de un interés creciente. Esto me indujo a dar, durante el año académico 1962-1963, en la Facultad de Economía Política de la Universidad de Varsovia, una série de conferencias tituladas *Introducción a la economía cibernética.* Estas conferencias, como de costumbre, fueron anotadas por el doctor Antoni Banasinski, quien, posteriormente, me ayudó en su redacción, lo cual agradezco.

El número limitado de las conferencias no me permitió tratar todos los temas que pensaba desarrollar por lo que, ya después de elaboradas las conferencias, y listas para ser impresas, he añadido un capítulo suplementario, *Enfoque generalizado de la teoría de la regulación.* De esta manera el libro abarca la totalidad de los problemas, es decir, la aplicación de los principios de la teoría de la regulación de los sistemas a los procesos económicos.

Las características de los asistentes a las referidas conferencias me obligaron a presentar las reglas fundamentales de la teoría de la regulación. Como resultado, el libro se convirtió en una introducción a la teoría general de la regulación, lo que hace que puedan encontrarlo de interés, no sólo los economistas sino también todos aquellos que se interesen por esa importante rama de la cibernética actual. En cuanto a la exposición de los fundamentos de la teoría de la regulación, el libro difiere de la mayor parte de la literatura que sobre este tema se ha escrito, porque no se ocupa de las aplicaciones concretas a la técnica, sino más bien de principios generales de la cibernética y de las formulacio-

1. OSKAR LANGE.

nes matemáticas, lo que corresponde especialmente al análisis de la estabilidad de los sistemas y a la teoría general de los sistemas considerada en forma de ecuación homogénea de la respuesta del sistema. Se ha dedicado especial atención al problema de la infalibilidad del funcionamiento de los sistemas.

Los análisis económicos que se presentan en esta obra no constituyen objeto de interés individual. Tienen más bien carácter de ejemplos que exponen la posibilidad y utilidad de la aplicación de los principios de la teoría general de la regulación al estudio de los procesos económicos sirviendo, al mismo tiempo, como una exposición de los principios de la teoría de la regulación en un campo distinto del que son ordinariamente aplicados. El mismo fin cumple, en el campo de la psicología, el ejemplo del funcionamiento de los estímulos, lo que indica también un amplio campo de aplicación de la cibernética a la ciencia moderna.

El presente libro no aborda todos los problemas de la cibernética y de sus aplicaciones al análisis de los procesos económicos, sino que se limita a una determinada parte de estos problemas, como la teoría de regulación de los sistemas. Supongo que he logrado presentar la riqueza y el amplio alcance de las aplicaciones de esta teoría. Tengo la esperanza de que esto interesará al lector, atrayéndole a otra ramas de la cibernética que poseen no menor importancia para el análisis de los procesos económicos y el perfeccionamiento de los métodos de la dirección efectiva en el desarrollo de la economía.

El libro aparece como un primer tomo de la serie de publicaciones de la Asociación Polaca de Cibernética y de la Editorial Científica del Estado, consagrada a la temática cibernética. Estoy, por lo tanto, muy agradecido a la Asociación Polaca de Cibernética y a la Editorial Científica del Estado por incluir el libro en esta serie, ya que supongo que con ello se aumentará el interés que ha despertado en el amplio círculo de lectores interesados por la cibernética.

OSKAR LANGE

Varsovia, febrero de 1965

CIBERNETICA Y ECONOMIA

El objeto del presente trabajo es analizar el funcionamiento de los procesos económicos, con ayuda de un moderno instrumento científico, la cibernética y, especialmente, de su rama denominada *teoría de la regulación automática.* Esta teoría tiene un amplio significado práctico; se puede también aplicar a la investigación del funcionamiento de los sistemas y procesos económicos. Se obtiene de esta manera un nuevo enfoque de los problemas de la regulación, gobernación correcta de estos procesos, así como un instrumento para una planificación efectiva y una regulación de la economía nacional o de las ramas que la componen.

Uno de los héroes de la comedia de Molière, el señor Jourdain, se entera con sorpresa, por su maestro, de que durante toda su vida ha hablado en prosa[1]. Situación parecida se da también en la economía y en la cibernética. Los economistas, ya desde los comienzos del desarrollo de la economía política, se ocupaban de los problemas que hoy definimos como problemas cibernéticos. Trataban de los procesos de ajuste y regulación de los sistemas compuestos de elementos relacionados entre sí, antes de que estos problemas aparecieran en otras ramas de la investigación, como la técnica y la biología, y mucho antes de que encontraran su formulación general teórica en una nueva ciencia, la cibernética.

La economía política, especialmente la economía burguesa, consideraba la economía capitalista como un sistema que se regula

[1] Se refiere a la comedia de Molière, ***El burgués gentilhombre.***

automáticamente, o como decimos actualmente, como un sistema autorregulador. De la misma opinión surgiría una conclusión político-económica, formulada en el principio del *laissez-faire,* según la cual el Estado no debe intervenir en el curso de los procesos económicos, ya que sólo puede perjudicar la autorregulación de dichos procesos y destruir el equilibrio económico al que se llegaría automáticamente.

La teoría de la autorregulación armónica de la economía capitalista ha sido criticada por los socialistas y, especialmente, por el socialismo científico de Karl Marx y Friedrich Engels.

Posteriormente también los economistas burgueses, cada vez con mayor fuerza y, en los últimos tiempos principalmente John Maynard Keynes, han abandonado la teoría de la autorregulación armónica de la economía capitalista. Aunque la autorregulación aparece todavía en la economía capitalista, no es obligado, como se afirma, que conduzca a resultados socialmente convenientes. Los resultados de la autorregulación en la economía capitalista pueden ser el desempleo, el despilfarro de las riquezas, etc. Por lo tanto, es imprescindible la intervención del Estado que dirige, de manera adecuada, los procesos económicos.

La planificación de la economía socialista nacional constituye un instrumento de la dirección racional de los procesos sociales. La utilización efectiva de este instrumento requiere, sin embargo, un conocimiento exacto de los principios científicos del funcionamiento de la economía socialista y del control del curso de dichos procesos.

Así, pues, los conceptos y términos como regulación, estabilidad, control, dirección, etc., pertenecientes al lenguaje moderno de la cibernética y sus correspondientes problemas objetivos, aparecen en la literatura económica con anterioridad a que fueran objeto de investigación en cibernética.

La cibernética es una ciencia reciente a la que dio origen la aparición simultánea en Francia y en Norteamérica, en 1948, del libro del eminente matemático Norbert Wiener; titulado *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*[2].

Sin embargo, la cibernética como ciencia tiene sus antecedentes en la *teoría de los servomecanismos.* En la técnica se denomina servomecanismo a un instrumento que sirve para controlar cierto proceso técnico, por ejemplo, una máquina o conjunto de máquinas, instalaciones eléctricas, etc. Este nombre se utiliza para definir el mecanismo que en vez del hombre actúa sobre cierta máquina o proceso técnico; servomecanismo es un "mecanismo de servicio"[3]. La aplicación cada vez mayor de los servomecanismos a la técnica ha dado lugar al nacimiento de la necesidad del análisis matemático de su funcionamiento y, precisamente, a este análisis se le denomina teoría de los servomecanismos o, cada vez con más frecuencia en nuestros días, *teoría de la regulación automática.*

Actualmente la teoría de la automatización constituye una rama muy desarrollada de la matemática aplicada y existe al respecto una literatura muy amplia[4]. La cibernética surge al descubrirse que la teoría de los servomecanismos, considerada como disciplina matemática, tiene una aplicación mucho más extensa que la limitada al área de los procesos técnicos industriales. La teoría de los servomecanismos ha encontrado su aplicación más precisa en la construcción de máquinas electrónicas matemáticas. Ya el creador de la cibernética, Wiener, estableció la existencia de profundas analogías entre el funcionamiento de los servomecanismos y las máquinas electrónicas matemáticas y el funcionamiento de los organismos vivos. Esta analogía aparece, de manera más evidente, en-

---

[2] Cibernética; es decir, control y comunicación en el animal y en la máquina.

[3] Sobre el papel de los servomecanismos en el proceso contemporáneo de la producción, veáse O. Lange, *Spoleczny proces produkcji i reprodukcji,* "Ekonomista", núm. 1, 1962, págs. 14-17.

[4] En polaco han aparecido, entre otros, los siguientes libros dedicados a la teoría de la automatización:

1) Trabajo colectivo de autores checos, *Teoria regulacji automatycznej,* PWNT, Varsovia 1962; son cada vez más populares:

2) Stefan Wegrzyn, *Podstawy automatyki,* PWN, Varsovia 1963.

3) Guido Wünsch, *Podstawy automatyki,* PWT, Varsovia 1960.

tre el funcionamiento de las máquinas electrónicas matemáticas y el funcionamiento del sistema nervioso central de los organismos vivos; por esta razón se denomina a las máquinas electrónicas matemáticas, "cerebros artificiales" [5].

Los organismos vivos se caracterizan por la capacidad de autorregulación; por ejemplo, los pájaros y los mamíferos, de manera automática, independientemente de la temperatura del medio, regulan su temperatura interna manteniéndola a un determinado nivel. Existe, pues, cierto mecanismo de regulación que permite que la temperatura interna del organismo humano se mantenga alrededor de 37° C. Análogamente se mantiene a un nivel determinado la presión sanguínea y otras características del organismo humano. En biología el fenómeno se denomina *homeóstasis.*

Si la autorregulación, es decir la homeóstasis en el organismo vivo falla, surgen enfermedades para cuya curación es preciso devolver al organismo su correcta posibilidad de acción.

Los organismos vivos tienen también la peculiaridad de dirigir su desarrollo de acuerdo con leyes establecidas de antemano, independientemente de las condiciones del medio. En biología es conocido el experimento de H. Driesch realizado con un huevo fecundado de erizo de mar. Al dividir el huevo en dos mitades cada una de ellas dará lugar a un erizo completo [6].

Wiener ha demostrado que los principios del funcionamiento de la autorregulación en los organismos vivos son los mismos que los del funcionamiento de la regulación automática en los aparatos técnicos [7]. Ambos casos de autorregulación pueden presentarse por medio del mismo esquema y la misma teoría matemática. Wiener fue aún más lejos e hizo observar que de manera análoga pueden abarcarse la regulación y el control de los procesos sociales y económicos.

[5] Al respecto, consúltese John von Neumann, *The Computer and the Brain,* New Haven, 1958, y una disertación, de carácter popular: W. Sluckin, *Mózg i maszyny,* traducción del inglés, Wiedza Powszechna, Varsovia 1957.

[6] Driesch ha demostrado que para la aparición del erizo es suficiente mantener una cuarta parte del huevo. De ello se ha tratado de obtener conclusiones filosóficas para sentar las bases teóricas del neovitalismo. Sobre este tema, consultar O. Lange, *Calosc i rozwój w swietle cybernetyki,* PWN, Varsovia 1962, especialmente págs. 82-83.

[7] N. Wiener, *Cybernetics...,* París-Nueva York 1948; especialmente capítulos IV y V.

Sin exagerar, por el momento, el hecho de que la economía capitalista, hasta cierto grado y límite, es un sistema de regulación automática, y los efectos que de ello se derivan y, por otra parte, cuáles son los principios de la regulación y el control de la economía socialista, hay que decir que los mismos esquemas teóricos que se utilizan para la regulación automática y el control en la técnica pueden aplicarse a los organismos vivos y también, en ciertas situaciones, a los procesos socioeconómicos. De manera semejante, la cibernética surge como ciencia general sobre el control y la regulación [8] de los sistemas que se componen de diferentes elementos, relacionados de cierta manera entre sí.

Los sistemas de los que se ocupa la cibernética están compuestos de elementos unidos entre sí por la cadena de acciones causa-afecto. A esta relación de los elementos del sistema se denomina *retroacción.* Recordando lo expuesto hasta ahora puede definirse la cibernética como la ciencia que versa sobre el funcionamiento de los sistemas de acoplamiento [9]. Cada mecanismo, en el sentido restringido de la palabra, es un ejemplo del sistema de elementos acoplados en los cuales la interacción de la causa-efecto se realiza según los principios de la mecánica o de la electromecánica. El funcionamiento de un elemento induce el funcionamiento de otro elemento anexo a él, lo que a su vez influye en los elementos conectados con él, directa o indirectamente. Situación parecida se da en los sistemas de elementos interconectados que existen en los procesos químicos, biológicos, etc., o en los procesos económicos-sociales. Precisamente estas características hicieron posible la creación de una ciencia de tipo general sobre el funcionamiento de los sistemas de acoplamiento,

[8] A continuación determinaremos con precisión esas categorías. Especificaremos también la relación que existe entre control y regulación.

[9] Veáse O. Lange, *Spolecznym proces produkcji i reprodukcji,* loc. cit., págs. 13-14, y del mismo autor, *Calosc i rozwój w swietle cybernetyki,* ed. cit., pág. 19.

que se conoce con el nombre de cibernética. Por lo general se añade al respecto que la cibernética es la ciencia de la "dirección" o "control" de los sistemas de acoplamiento [10]. Algunos autores definen también la cibernética como la ciencia de las "máquinas" o los "mecanismos" en el sentido más amplio de la palabra [11], entendiendo por "máquina" o "mecanismo" el sistema de los elementos interconectados, que actúan entre sí; es decir, los sistemas de acoplamiento.

La aplicación de la cibernética a la economía sirve tanto a los fines de conocimiento como a la práctica económica. Los fines del conocimiento se alcanzan gracias a que la cibernética enfoca, de una forma nueva, los métodos de acoplamiento de los elementos y de funcionamiento de los sistemas económicos, ya se trate de formaciones socioeconómicas completas o de algunas de sus partes; por ejemplo, el "mecanismo" del mercado, la circulación monetaria, el intercambio de mercancías en el comercio exterior, etc. De estos problemas se ha ocupado la economía desde el momento de su creación. Sin embargo, no existía una ciencia especial que, por medio de un aparato científico adecuado, diera a la investigación dedicada a estos problemas la necesaria precisión, que posibilitase su formulación y solución correctas.

Para la economía socialista la cibernética posee una importancia especial. En el sistema socioeconómico socialista, parecido en todas las economías, hallamos la unión de las acciones de un gran número de elementos (en última instancia dichos elementos están constituidos por las personas mismas). Sin embargo, en la economía socialista planificada, para alcanzar un determinado resultado, estos elementos se pueden clasificar, separar, unir y agrupar en auténticos sistemas de acoplamiento.

[10] El término cibernética se halla etimológicamente relacionado con la noción de control, dado que procede de la palabra griega *kybernetes*, que significa "timonel del barco". La palabra "gobernador" —el que dirige— proviene de la misma fuente greco-latina. Merece la pena subrayar que en inglés el regulador —o sea, el "timonel"— de la máquina de vapor se denomina "governor", o sea, gobernador.

[11] Veáse, p. ej., W. Ross Ashby, *Wstep do cybernetyki*, traducción del inglés, PWN, Varsovia 1963, pág. 15. (Hay trad. esp. de Jorge Santos, *Introducción a la cibernética*. Buenos Aires, Ediciones Nueva Visión 1960, página 11.)

Especialmente para la ciencia de la planificación y dirección de la economía nacional, la cibernética aparece como una ciencia auxiliar muy importante, como ya observó Norbert Wiener [12]. Tanto en países capitalistas como socialistas, y entre estos últimos, sobre todo, en la Unión Soviética, se han empezado a ocupar de este problema, muy detalladamente, desde hace algunos años [13]. Se ha ampliado y afianzado la convicción del importante papel y de la significación de la cibernética en el control total y parcial de determinadas ramas de la economía nacional.

La literatura sobre este tema no es aún muy amplia. En realidad empezó, hasta cierto punto, como una moda, al hablarse y escribirse sobre cibernética en general y también sobre las posibilidades de utilizar esta disciplina científica en la ciencia económica. Pero son pocos los trabajos que abarcan la aplicación concreta de la cibernética a los problemas económicos. (Tal como sucede en los comienzos de una nueva ciencia, así se presenta la situación). En cuanto a la bibliografía sobre el tema, pueden mencionarse solamente dos trabajos, uno de Tustin y otro de Allen [14]. Tustin, profesor de electrotecnia, fue el primero que trató de demostrar como la teoría de las redes eléctricas puede aplicarse a la investigación de los sistemas económicos y al control y regulación de los mismos. En los últimos diez años han aparecido en revistas algunos artículos que se refieren a la aplicación de la cibernética a la teoría económica [15]. También merece atención un conjunto de artículos que han

[12] Veáse N. Wiener, *Cybernetics...*, ed. cit., págs. 185 y sgs.

[13] Puede verse especialmente el trabajo colectivo elaborado bajo la dirección de A. J. Berg, *Kibiernietiku na sluzbu komunizmu*, Moscú-Leningrado 1961, t. I; 1964, t. II.

[14] R. G. Allen, *Ekonomia matematyczna*, PWN, Varsovia 1961, cap. 9, "Regulowanie procesów ekonomicznych"; Arnol Tustin, *The Mechanism of Economics Systems*, Londres 1953, segunda edición 1957.

[15] Especial atención merecen los trabajos de A. W. Phillips, *Stabilization Policy in a Closed Economy*, "Economic Journal", Londres 1954, *Stabilization Policy and the Time Forms of Langged Responses*, en la misma revista, 1957, *La Cybernétique et le contrôle des systemes économiques*, "Cahiers de l'Institut des Sciences Economiques Appliquées", serie N, número 2, París 1958. Además de ello: G. A. Simon, *An application of Servomechanism Theory to Production Control*, "Econometrica" 1952. Veáse también Stafford Beer, *Cybernetics and Management*, Londres 1959, y

aparecido, publicados en alemán, en Munich, en 1957, bajo un título común: *Los procesos de regulación en la economía comparados con los procesos de regulación en la técnica*[16]. Y con estas referencias se agota la literatura sobre el tema.

Hemos definido la cibernética como la ciencia general sobre el control y la regulación de los sistemas de acoplamiento. Se ocupa la cibernética de investigar las reglas y principios generales a los cuales se subordinan todos estos sistemas, independientemente de su carácter objetivo. Determinar la existencia de principios comunes en el funcionamiento de los sistemas técnicos, biológicos, económicos, etc., es la aportación principal realizada por la cibernética. Cada uno de los principios del funcionamiento de los mecanismos u otro tipo de sistemas de acoplamiento se conocían ya con anterioridad; sólo faltaba la generalización de estos principios y la determinación de las regularidades comunes.

Lo mismo Adam Smith, escribiendo sobre la supuesta "mano invisible" que de manera armoniosa dirige y coordina los procesos económicos llevándolos al estado de equilibrio, que Karl Marx analizando el funcionamiento de la ley del valor como regulador de la producción de mercancías, y, especialmente, de la producción capitalista, se ocupaban, en realidad, de los problemas de la regulación de los sistemas económicos y, por tanto, de la cibernética.

El descubrimiento realizado por la cibernética, de la semejanza y de los principios generales a los que se subordinan los sistemas de acoplamiento, ha dado grandes resultados, tanto teóricos como prácticos. La importancia teórica de este descubrimiento consiste en que ha demostrado la existencia de la *analogía* estructural o, expresado en leguaje matemático, el *isomorfismo* de los procesos que se

J. Steiendl, *Servo-Mechanisms and Controllers in Economic Theory and Policy*, en el trabajo de conjunto *On Political Economy and Econometrics*, Essays in Honour of Oskar Lange, PWN, Varsovia 1964.

[16] Título orginal: *Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge im Vergleich zu Regelungsvorgängen der Technik*. El conjunto de estos artículos ha aparecido, traducido al ruso, en Moscú, en 1961, bajo el título: *Procesy regulirowanija w modieliaj ekonomicheskich sistiem*.

originan en las diferentes ramas de la vida real, a saber: la técnica, la biología, la economía, etc.

Merece la pena recordar que en sociología existía la denominada "escuela orgánica" que trataba de hallar una analogía entre los organismos biológicos y la sociedad humana. Sin embargo, esta comparación la efectuaba de una manera primitiva y puramente superficial, buscando las semejanzas de los objetos; comparando, por ejemplo, el sistema nervioso del organismo humano con la red telefónica, las venas con la red de comunicaciones, el cerebro con el gobierno de la sociedad, etc. Es claro que la analogía era errónea y estaba planteada de forma acientífica. La cibernética descubrió una analogía más profunda basada en la semejanza estructural de los métodos de acción de los sistemas de elementos acoplados. Esto representa un gran logro científico que tiene una importancia muy seria desde el punto de vista filosófico y desde el punto de vista de la metodología general de la ciencia.

¿Cuál es la importancia práctica de la analogía descubierta por la cibernética? Demostrar que es posible, basándose en estas semejanzas, construir en una determinada rama procesos análogos a los que se realizan concretamente en otra rama científica. Por ejemplo, se pueden construir mecanismos que funcionen de manera análoga a ciertos procesos económico-sociales[17]. A dichos mecanismos se denomina *máquinas* (o aparatos) *analógicas*.

Puede, por ejemplo, representarse por medio del mecanismo hidráulico, el curso de los procesos de flujo intersectorial en la economía nacional y solucionar diversos problemas de reproducción ampliada[18]. En los aparatos de esta índole la creación de las reservas de productos se halla representada por el líquido recogido en ciertos

[17] Ver A. Tustin, *The Mechanism of Economic Systems*, capítulos VI y VII y N. F. Moorhouse, R. H. Strolz, S. J. Horwitz, *An Electro-Analogue Method for Investigating Problems in Economic Dynamics*, "Econometrica" 1950; O. J. M. Smith y H. F. Erdley, *An Electronic Analogue for an Economic System*, "Electrical Engeneering" 1952. La bibliografía está dada en el libro de Tustin; otros trabajos, principalmente en la revista "Econometrica".

[18] Compárese el apéndice I del libro de O. Lange, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, PWN, Varsovia 1961.

recipientes. El descenso del volumen del líquido en el recipiente significa la disminución de las reservas, etc. En vez de un aparato hidráulico puede utilizarse una red eléctrica. La corriente eléctrica sustituye al flujo líquido, se mide entonces la corriente (o la potencia) en determinados puntos de la red [19]. De manera parecida, el tipo de fenómenos físicos (p. ej., en la rama de la hidromecánica) se puede representar (modelar) por medio de fenómenos que ocurren en otra rama de la física (p. ej., por medio de fenómenos eléctricos). Como acabamos de señalar, los aparatos hidráulicos pueden sustituirse por la red eléctrica, y ambos pueden servir como modelo del proceso económico.

Los aparatos análogos permiten cuantificar los procesos que ellos mismos reflejan. Esto se realiza mediante la medición de las magnitudes transformadas por un aparato análogo dado. Por ejemplo, el volumen del líquido en el recipiente de un aparato hidráulico dado representa el estado de las reservas de un producto determinado en el instante preciso, etc. Los aparatos análógicos utilizados para medir se denominan máquinas analógicas matemáticas.

Así, pues, el descubrimiento de los principios comunes del funcionamiento de los sistemas de acoplamiento en diversas ramas, ha conducido a la construcción de máquinas analógicas de diferentes tipos y aplicaciones. Estos diferentes tipos de máquinas analógicas matemáticas hallan cada vez una aplicación más amplia en la técnica, la economía y la gestión industrial. La utilización en la actividad económica de los principios comunes del funcionamiento de los sistemas de acoplamiento, recibe el nombre de *simulación*. Este es el método que, especialmente en el campo de la dirección industrial, gana cada vez mayor importancia, por ejemplo, en los grandes consorcios. La simulación hace posible también la representación de los

[19] Un aparato electrónico según el proyecto del libro mencionado de O. Lange, ha sido construido por la Cátedra de Automatización de la Academia de Minería y Siderurgia de Cracovia bajo la dirección del profesor Henryk Górecki, en colaboración con el profesor Boleslaw Klapkowski, Director de la Cátedra de Economía Política de la misma escuela. Este aparato se encuentra actualmente en la Facultad de Economía Política de la Universidad de Varsovia.

complicados procesos que tienen lugar en los organismos vivos, por medio de diferentes tipos de mecanismos.

La cibernética se ha utilizado también en la construcción de las máquinas electrónicas digitales que sirven para elaborar una gran cantidad de datos numéricos y realizar ciertas funciones lógicas.

Sin embargo, los principios del funcionamiento de las máquinas electrónicas digitales difieren del funcionamiento de las máquinas analógicas. Las máquinas electrónicas digitales no se basan en la analogía estructural directa, con relación a los procesos que tienen que simular, sino en las leyes de la lógica y de la aritmética. Estas máquinas no simulan directamente el curso de los procesos físicos, biológicos o socioeconómicos, sino que simulan las funciones lógicas y aritméticas. Puesto que las reglas de la lógica y la aritmética reflejan, de cierta manera, el funcionamiento del cerebro humano, existe una analogía indirecta entre el funcionamiento de las máquinas digitales y el del cerebro humano. Esta analogía es poco conocida aún, puesto que también es poco conocido el funcionamiento detallado del sistema nervioso central [20].

[20] Veáse sobre este tema el libro anteriormente mencionado de J. von Neumann, *The Computer and the Brain*, ed. cit. La aplicación de las reglas de la lógica y la aritmética en las máquinas digitales se basan en los algoritmos, es decir, las reglas de procedimiento conducentes al resultado deseado por medio de un número finito de operaciones. En relación con esto surgió una nueva rama matemática, a saber: la teoría de los algoritmos. La base de esta teoría ha sido presentada por W. M. Glushkow Ww., *Vviedienije w kibiernetiku*, Wiev 1964.

330.1
L274i
911379
BIBLIOTECA-UNA

PRINCIPIOS GENERALES DE LA REGULACION Y DEL CONTROL

§ 1. La regulación automática en la técnica

Con el fin de aclarar en qué se basa el proceso de la regulación automática y la representación esquemática del funcionamiento de este proceso, presentaremos, en principio, unos cuantos ejemplos de la regulación automática aplicada a la técnica. Puesto que el funcionamiento esquemático de los procesos de la regulación es igual en cada rama en la que funcionan los sistemas de acoplamiento, el análisis de la regulación en la técnica nos permitirá, por analogía, desarrollar la teoría general de la regulación y encuadrarla en modelos y formas matemáticas.

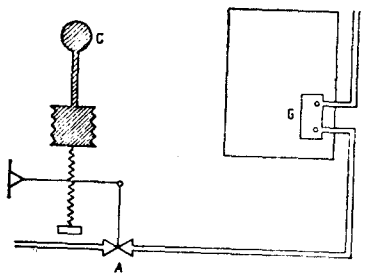


FIG. 1

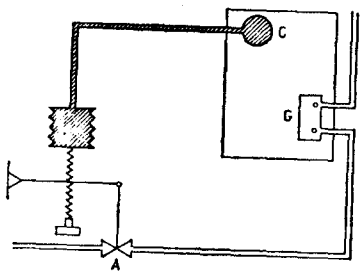


FIG. 2

Uno de los aparatos reguladores más sencillos, aplicados a la técnica, es el llamado *termostato automático*. Dicho aparato, representado esquemáticamente en las figuras 1 y 2, sirve para mantener una temperatura constante, por ejemplo, en una habitación calentada por los radiadores señalados con la letra *G*. En general, si la temperatura del exterior es conocida, se puede calcular cuál será la temperatura en la misma habitación bajo una influencia determinada

de vapor, controlada por medio de las válvulas *A*. Y, viceversa, con la temperatura dada del exterior se puede determinar cuál deberá ser la afluencia de vapor para que la temperatura en la habitación se mantenga al nivel deseado. Al igual que la temperatura de la habitación, la afluencia del vapor a los calentadores puede medirse; es decir, puede expresarse en números.

Si la temperatura del ambiente cambiase, si, por ejemplo, baja, entonces con una alimentación constante de vapor en los calentadores, bajará también la temperatura de la habitación. Para mantener esta temperatura al nivel constante deseado (la denominda normal), hay que aumentar el flujo de vapor en los radiadores. Esto se puede afectuar de diferentes formas. La más sencilla, aunque primitiva, consiste en que la válvula reguladora del flujo de vapor (situada dentro o fuera de dicha habitación) se regule por un dispositivo especial que, a base de las observaciones registradas por el termómetro, que indica la temperatura del exterior o del interior de la habitación, regule de una manera determinada la válvula, aumentando o disminuyendo el flujo de vapor. El operario que regula la temperatura de la habitación puede, bien utilizar una tabla que determine la relación entre el flujo de vapor imprescindible para mantener la temperatura constante de la habitación y la temperatura del exterior, o bien actuar a base de "pruebas y errores". En este segundo caso no precisa ninguna tabla, afectuándose la regulación por la adecuada manipulación de las válvulas y la constante observación del termómetro que indica la temperatura de la habitación.

El análisis del ejemplo de la regulación de la temperatura en el interior de las habitaciones, permite sacar las siguientes conclusiones:

1. La regulación puede realizarse por medio de la *compensación de las desviaciones del valor real del efecto del valor acordado (normal);* este es el *principio de compensación de las desviaciones.* Los aparatos que sirven para dicha regulación reciben el nombre de *reguladores.*

2. La regulación puede ser realizada también por medio de la *compensación de las perturbaciones.* En el caso analizado esto significaría que se llevaría a cabo la compensación de las desviaciones de la temperatura de la habitación, con respecto a los cambios que

ocurriesen en la temperatura exterior. Los aparatos que conpensan las perturbaciones reciben el nombre general de *compensadores.*

3. La regulación puede también realizarse por medio de la *eliminación de las perturbaciones.* En el caso de una tendencia a mantener la temperatura constante en la habitación, esto también significaría la seguridad de que el cambio de la temperatura del exterior no influye sobre la temperatura del interior de la habitación.

Puede tenerse la impresión de que el método de regulación más fácil y sencillo sea la eliminación de las perturbaciones. Efectivamente, los aparatos que eliminan las perturbaciones se utilizan con frecuencia. Se les da a todos nombres diferentes, por ejemplo, *amortiguadores, aisladores, escudos,* etc. También se dan aparatos de este tipo en los organismos vivos, por ejemplo, el caparazón de la tortuga la protege de la influencia del medio ambiente y elimina de esta manera las perturbaciones que pudieran ocasionar efectos no deseados en su organismo.

Sin embargo, no siempre es posible la aplicación de los amortiguadores, etc., y entonces, la regulación tiene que realizarse por el método de la compensación de las desviaciones o de la compensación de las perturbaciones. La compensación de las perturbaciones a primera vista es un método más sencillo que la compensación de las desviaciones. Sin embargo, como hemos visto, la aplicación del primero de ellos a la regulación de la temperatura de las habitaciones, requiere el conocimiento de la relación cuantitativa que existe entre la temperatura del ambiente y el flujo del vapor y la temperatura de la habitación. Esta es una característica del método de compensación de las perturbaciones que, desde el principio, requiere amplia información (el conocimiento de ciertas relaciones funcionales), especialmente cuando existen muchas y muy variadas fuentes de perturbación. En la práctica general, la realización del principio de la compensación de las desviaciones no requiere estas informaciones, puesto que puede utilizarse aplicando el método de "pruebas y errores". Esto es precisamente la causa de que frecuentemente en la técnica se aplique la regulación basada en la compensación de las desviaciones, especialmente cuando aparecen perturbaciones imprevistas o frecuentes o cuando se desconoce la relación funcional entre

la intensidad de las perturbaciones y el efecto que producen. De ahí también que el principio de la compensación de las desviaciones se considere hoy como un método habitual de regulación, aplicado a la técnica; sin embargo, ha sido automatizada, es decir, la regulación efectuada por el hombre ha sido sustituida por un aparato que funciona automáticamente. Por supuesto, esto no influye en la esencia del proceso mismo de la regulación.

La figura 1 representa el esquema de una regulación automática de la temperatura de las habitaciones, según el principio de compensación de las perturbaciones, y la figura 2 es también un esquema de una regulación automática realizada por medio del método de compensación de las desviaciones. En ambos casos, los aparatos de la regulación automática constan del receptor *C,* que es un recipiente lleno de gas. El receptor está unido por conductos adecuados con el necesario aparato regulador. Cuando la temperatura en el exterior del receptor sube, el gas que se halla dentro del receptor se dilata y empuja un pistón que, a su vez, impulsa un muelle, una palanca y una válvula, produciendo la disminución del flujo de vapor. Y viceversa, cuando la temperatura del exterior del receptor baja, de manera similar aumenta el flujo de vapor en los calentadores.

De manera análoga se construye el aparato de la regulación automática por el método de la compensación de las desviaciones (Fig. 2), con la única diferencia de que el receptor está situado, no en el exterior, sino en el interior de la habitación en cuestión. Los cambios de temperatura en la habitación ocasionan de inmediato la adecuada puesta en marcha de la regulación del flujo de vapor.

La regulación basada en la compensación de las desviaciones comprende la *retroacción* que se caracteriza por el hecho de que se halla cerrada la cadena de interconexiones de los elementos del sistema dado. Decimos entonces que se encuentra *cerrado el circuito de regulación (closed loop control).* En cambio, en la regulación que se basa en la compensación de las perturbaciones, no existe retroacción, puesto que la cadena de las interconexiones se halla abierta. Decimos también que se encuentra abierto el *circuito de regulación (open loop control).*

2. OSKAR LANGE.

En esta ocasión merece la pena hacer saber al lector que reina aún una gran confusión en la terminología correspondiente a los conceptos fundamentales de la cibernética. Algunas veces, por ejemplo, para designar el proceso de la regulación independientemente de la forma en que se realiza, se utiliza el término dirección [1], que significa la influencia sobre el resultado de la acción del sistema con objeto de lograr el fin propuesto. En cambio, los términos "regulación" y "control" se usan en sentido estricto para denominar la dirección que se sirve del método de compensación de las desviaciones con respecto a la norma. Para el caso de determinar la regulación con el método de eliminación o compensación de las perturbaciones, se usan expresiones como eliminación, compensación, estabilización, etc., de las condiciones.

Presentaremos aún otro ejemplo de un aparato que sirve para la regulación de los procesos técnicos, el primero que históricamente se fabricó a escala industrial. Se trata del regulador automático del flujo de vapor, en la máquina de vapor inventada por Watt y patentada en 1769. Dicho regulador consta de dos esferas pesadas, fijas a unos brazos que giran alrededor de un eje vertical, con una velocidad que depende de la del eje principal de la máquina. Si la velocidad de giro del eje principal de la máquina sobrepasa la norma prevista, la fuerza centrífuga origina el levantamiento de las esferas y de sus brazos. En los brazos del regulador se halla fija una palanca adecuada y por medio de ésta se efectúa un cierre parcial de la válvula en la tubería por la cual el vapor llega desde la caldera a los cilindros de la máquina. Entonces, la velocidad de las revoluciones de la máquina disminuye, lo que a su vez causa el descenso de las esferas, del regulador y la mayor apertura de la válvula que regula el flujo del vapor a la máquina. De esta manera, gracias al regulador de Watt, se efectúa la estabilización de las revoluciones de la máquina con respecto a un cierto nivel determinado con anterioridad. Todas las desviaciones en la velocidad de las revoluciones

[1] En inglés a este término corresponde el de *control*, en ruso el término *upravlienie;* de aquí que en la literatura rusa la cibernética se denomine como la ciencia sobre *upravliaiemej sistiemaj.*

de la norma establecida son compensadas de forma automática y rápidamente [2].

Sobre un principio similar se basa la regulación automática de la velocidad de rotación de otros mecanismos; por ejemplo, de las turbinas de agua. Naturalmente la regulación de los mecanismos puede efectuarse mediante dos o tres de los sistemas anteriormente descritos. Fijando la máquina sobre unos muelles y sobre una base adecuada, eliminamos la posibilidad de interferir ciertas perturbaciones en el funcionamiento de la máquina; al mismo tiempo otros aparatos compensan las perturbaciones que no se pudieron eliminar y, por último, los reguladores compensan las desviaciones respecto de la norma que surgen durante su funcionamiento. En este caso decimos que se ha aplicado el método *complejo* de control o regulación [3].

Presentaremos ahora un ejemplo de los métodos analógicos de regulación de los procesos económicos. Supongamos que deseamos estabilizar los ingresos de los agricultores (propietarios agrícolas o miembros de las cooperativas de producción) que sufren grandes variaciones en diferentes años en relación con la bondad del año en sentido agrícola; es decir, con la magnitud de las cosechas. Se puede alcanzar este objetivo mediante tres métodos. Primero, se puede tratar de que las cosechas, en ningún año, bajen de un nivel medio. Este será el método de eliminación de las perturbaciones cuya realización en dicho caso es prácticamente imposible, puesto que exigiría la posibilidad de influir en las condiciones meteorológicas. Se puede lograr una realización parcial a través del progreso de la agrotecnia, que disminuye la dependencia de las cosechas respecto del clima. En segundo lugar es posible aplicar el método de la compensacion de las perturbaciones, lo que, en este caso, puede realizarse aplicando,

[2] La primera formulación matemática del funcionamiento del regulador Watt y parecidos reguladores fue dada por un conocido físico, J. C. Maxwell, en el trabajo *On Governors,* Proceedings of the Royal Society of London, 1868.

[3] Sobre el tema de los diferentes métodos de regulación, aplicados en la técnica y los métodos complejos, consúltese A. G. Iwachnienko, *Cybernetyka techniczna,* traducción del ruso, PWT, Varsovia 1964. De la definición "métodos complejos de regulación" hay que diferenciar la idea de "regulación compleja", que se efectúa al regular muchas magnitudes que caracterizan un proceso dado.

según las condiciones atmosféricas, el regadío, los recursos hidráulicos o el drenaje, etc. El tercer método consiste en organizar una caja de compensación [4], que se forma con las adecuadas cuotas de los agricultores, durante los años en que las cosechas son superiores a la media y de la cual, a su vez, se les paga a los agricultores en los años en que las cosechas se hallan por debajo de la media. Este último método es precisamente la compensación de las desviaciones con respecto a la norma media de los ingresos del agricultor.

En la práctica también se pueden emplear los tres métodos de regulación del nivel de ingresos de los agricultores; es decir, utilizar un método complejo de regulación. En Polonia y en muchos otros países el instrumento que, en cierta medida, regula los ingresos de los agricultores es el fondo de seguro formado con las cuotas de todos los agricultores y destinado a compensar diferentes clases de riesgos (inundaciones, vendavales, pedrisco, incendios, etc.), que afectan a las explotaciones agrícolas. El seguro se sirve en la práctica de los tres métodos de regulación. En el léxico de los seguros el método de regulación que consiste en la eliminación de las perturbaciones recibe el nombre de actividad preventiva, el método de compensación de las perturbaciones se denomina actividad tranquilizante y el método de compensación de las desviaciones, actividad aseguradora. La Oficina Nacional de Seguros realiza los tres tipos de actividades; es decir, aplica el método complejo de regulación.

Conviene subrayar que la elección del grado en que se aplicará cada uno de estos métodos de regulación, anteriormente mencionados, constituye la decisión económica. Es inútil, por ejemplo, emplear a toda costa los métodos de compensación de las perturbaciones si la realización de este método resulta demasiado costosa; entonces, desde el punto de vista económico, es mejor aplicar, por ejemplo, el método de compensación de las desviaciones. Este criterio nos guiará frecuentemente al aplicar la regulación a la técnica.

[4] En la Unión Soviética proponía la creación de una caja de compensación parecida, W. S. Niemchinov, quien claramente define la actividad de dicho fondo como el proceso cibernético de la regulación automática. Véase W. S. Niemchinov, *Ekonomiko-matematicheskie mietode i modieli*, Moscú 1962, pág. 55.

§ 2. Fórmula principal de la teoría de la regulación

El concepto fundamental de la ciencia del control y la regulación es la retroacción, sobre la que ya se ha hablado en el parágrafo anterior. Nos ocuparemos ahora de este concepto con más precisión y con este fin volveremos una vez más al análisis del proceso de regulación técnica.

Consideremos un determinado *sistema regulado S* (que puede ser una máquina de vapor, una turbina, una instalación de calefacción, etc.), sobre el cual influyen ciertas acciones (p. ej., el caudal de vapor) que producen, como resultado, un efecto determinado (p. ej., aumento en la velocidad del movimiento rotativo de la máquina). Supongamos que tal efecto influye en un aparato que se conoce por *regulador R*, que a su vez influye sobre el sistema de regulación considerado. A la "acción reversiva" de este tipo la denominamos *retroacción (feedback*, literalmente regeneración) [5], que se establece entre el funcionamiento del regulador R y el sistema regulado S.

Una retroacción así puede representarse en un dibujo conocido por *diagrama de bloques*, es decir, de forma *estructural* (Figs. 3a y 3b), en el que el rectángulo con la letra S significa el sistema regulado y el rectángulo con la letra R el regulador, llamado también *sistema regulante*. Toda estructura compuesta del sistema regulado y del regulador se denomina *sistema de regulación*. Lo representamos con un símbolo $S+R$, donde R y S son sistemas acoplados con retroacción. En este diagrama la acción reversiva del regulador R se superpone al estado de la entrada del sistema regulado S, es decir, que se efectúa la *superposición* de las acciones. Lo representamos de manera gráfica o indicando la acción reversiva del regulador sobre el sistema regulado como una entrada suplementaria (Fig. 3a) o señalando la supersición de las operaciones en forma de círculo con una cruz (signo +) e introduciendo, como una entrada, el resultado de esta superposición (Fig. 3b). Ambas formas de representación son equivalentes.

[5] En ruso retroacción se denota con el término *obratnaya sviaz*.

Nos ocuparemos ahora de precisar más exactamente el sistema de regulación presentándolo por medio del diagrama de bloque. Aparecen dos sistemas con ciertas propiedades características. Antes que nada, sobre cada uno de estos sistemas influyen causas externas de una manera determinada. Sirviéndonos de la analogía recibida de la técnica diremos que las causas exteriores influyen sobre los sistemas S y R mediante determinadas entradas. Las *entradas* pueden también considerarse como determinados estados exteriores sobre los cuales el sistema reacciona de alguna manera. En cambio,

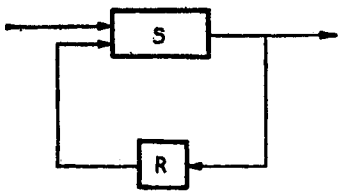


FIG. 3a

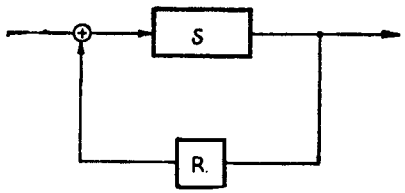


FIG. 3b

a los estados determinados del sistema, que influyen en el ambiente exterior, se les conoce con el nombre de *salidas*. Por ejemplo, la entrada en la máquina de vapor es el flujo de vapor y la salida, la velocidad del movimiento de rotación de dicha máquina. En las instalaciones de la calefacción la entrada es también el flujo de vapor y la salida una temperatura constante, etc.[6].

El sistema de elementos, conectado con el exterior solamente por determiandas entradas y salidas, recibe el nombre de *sistema relativamente separado*[7].

El estado de las entradas y el estado de las salidas de cierto sistema, puede determinarse por ciertos números. Si el sistema tiene solamente una entrada y una salida, el estado de su entrada lo

[6] Véase O. Lange, *Calosci rozwój w swietle cybernetyki*, ed. cit., pág. 12. Muchos conceptos de la cibernética como, p. ej., entrada, salida, acoplamiento, han sido tomados de la teoría de las redes eléctricas.

[7] Dicho término ha sido propagado por H. Greniewski. Véase H. Greniewski, *Zasady logiki indukcji*, PWN, Varsovia 1955, pág. 28 y, del mismo, *Cybernetyka sposobem niematematycznym wylozona*, PWN, Varsovia 1959, págs. 11-12. El término de sistema relativamente separado ha sido utilizado anteriormente en Polonia en la teoría de las redes eléctricas y en la radiotecnia.

indicamos con la letra x y el estado de su salida con la letra y. El diagrama de bloque del sistema expuesto se representa en la figura 4. Los números que miden los estados de la entrada y la salida son, con gran frecuencia, números reales. En caso de que estos estados tengan un carácter cualitativo, es decir, que se hallen condicionados por la aparición o no aparición de cierta propiedad, para determinarlos es suficiente utilizar dos números 0 y 1, de los que el primero significa la ausencia y el segundo la existencia de cierta propiedad en la entrada o en la salida.

FIG. 4

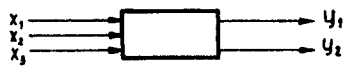


FIG. 5

El sistema puede tener más de una entrada y una salida (ver la fig. 5). Dado que el estado de cada entrada y salida se encuentra determinado por un número, el estado de todas las m entradas y n salidas puede representarse por los vectores siguientes:

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

y también

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,.$$

Entonces los diagramas de bloque del sistema pueden presentarse de manera semejante, como en el caso de una entrada y una salida (Fig. 4) con la sola diferencia de que x e y significarán no los números simples, sino unos vectores determinados.

Analicemos qué sucede dentro del sistema. En el sistema entra cierta acción determinada por el número (o vector) x y sale una acción determinada por el número (o vector) y. Se puede entonces decir que en el sistema se efectúa cierta transformación, lo que representaremos de la siguiente forma:

$$y=Tx\,. \qquad [1.1]$$

Con frecuencia la transformación que se realiza dentro de un sistema cualquiera puede describirse por medio de cierta función

$y=f(x)$ que subordina cada estado de la entrada x, al estado de la salida y. De todas maneras, el funcionamiento del sistema consiste en transformar el estado de la entrada en el estado de la salida. Se representa como en la figura 6, colocando el símbolo T al diagrama de bloque.

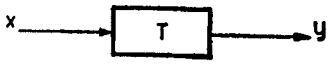


FIG. 6

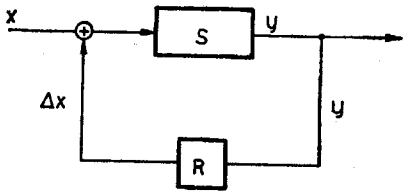


FIG. 7

¿En qué consiste el funcionamiento del sistema de regulación $S+R$? En el sistema regulado S se efectúa la transformación del estado de la entrada x en el estado de la salida y, que representaremos por

$$y=Sx\,. \qquad [1.1a]$$

Como puede observarse en el diagrama de bloque expuesto en la figura 7, el estado de la salida y del sistema regulado S se halla introducido a la entrada del regulador R, que lo transforma en el estado de la salida Δx. El estado de la salida del regulador está sumado al valor de la entrada x del sistema S y en el resultado final el estado de la entrada del sistema S es $x+\Delta x$. La corrección Δx de la entrada del sistema S depende del estado de la salida y. Indicaremos por z el valor fijo; es decir, la norma deseada del estado de la salida del sistema regulado S. El ajuste adecuado del regulador R consiste en que la corrección Δx produzca la compensación de toda desviación del estado de la salida y respecto al valor fijo z y reduzca el estado de la salida del sistema regulado a la norma dada, es decir, a $y=z$.

Se puede realizar un cálculo que determine los valores numéricos de la retroacción anteriormente descrita. Consideremos para comenzar que en el sistema regulado se presenta una transformación sencilla que consiste en la multiplicación del estado de la

entrada por el número natural S; tenemos entonces $y=Sx$. Esta transformación lleva el nombre de *transformación proporcional.*

Se llama muchas veces transformación proporcional de *ampliación* si $S>1$ y de *reducción* si $S<1$. Al sistema en que ocurre la transformación proporcional se le da entonces el nombre de *amplificador* o *reductor*. El número $S=\frac{y}{x}$ se denomina *razón de transformación*[8] *del sistema.* Si, p. ej., el estado de la entrada del sistema $x=3$ significa la cantidad de agua que afluye a un sistema dado y el estado de la salida $y=2$, significa la cantidad de agua que sale del sistema, entonces la razón de transformación de ese sistema es $S=\frac{y}{x}=\frac{2}{3}<1$, lo que significa que el sistema es reductor.

La razón de transformación del sistema $S=\frac{y}{x}$ es el numerador de la relación, porque los números x e y pueden medirse en unidades diferentes. Por ejemplo, x puede significar la cantidad del vapor en litros que se introduce en la máquina de vapor durante 1 segundo, e y el número de revoluciones de la máquina por segundo. Entonces la razón de transformación $S=\frac{y}{x}$, viene determinada "en revoluciones por segundo que corresponden a un litro de vapor por segundo".

Consideremos ahora que en el regulador también se realiza la transformación proporcional de la razón de transformación R. Entonces la corrección que el regulador introduce en el estado de la entrada del sistema regulado tiene el valor $\Delta x=Ry$. Introduciendo esta corrección, obtendremos que en el estado de la salida del sistema regulado tiene el valor final

$$y=S(x+\Delta x)=S(x+Ry)=Sx+SRy\,.$$

Deducimos de aquí

$$y=\frac{S}{1-SR}x \qquad [1.2]$$

[8] En inglés, *transmittance.*

Esta es la *fórmula fundamental de la teoría de la regulación*[9]. Esta expresión indica la relación que existe entre el estado de salida y el estado de entrada del sistema regulado S después de tener en cuenta la corrección introducida por el regulador R.

Esta fórmula permite determinar cuál debe ser el estado de la entrada; es decir, la magnitud que se regula, x denominada también *alimentación del sistema de la regulación* para que, en presencia de las magnitudes dadas S y R, obtener el resultado deseado $y=z$, es decir, para que el estado de la salida del sistema regulado fuese igual al valor previsto. Con este objeto, en la fórmula [1.2] hacemos $y=z$ y obtenemos

$$x=\frac{1-SR}{S}z\,. \qquad [1.2a]$$

Si la magnitud que se regula x viene también dada, entonces podemos determinar la razón de transformación R del regulador, necesaria para obtener el valor dado $y=z$. Es decir,

$$R=\frac{z-Sx}{Sz}\,, \qquad [1.2b]$$

expresión que se deduce directamente de la fórmula [1.2a].

Resultará a continuación que la acción de los llamados sistemas lineales de regulación puede determinarse por medio de la fórmula [1.2]. La expresión $\frac{S}{1-SR}$ se denomina *razón de transformación del sistema de regulación.* En el caso descrito, es decir cuando en el sistema regulado y en el regulador se realiza la transformación proporcional, la razón de transformación es un número real.

[9] Frecuentemente en la literatura dicha fórmula se expresa en la forma

$$y=\frac{S}{1+SR}x\,.$$

Esto se deduce de que algunos autores dan a la razón de transformación del regulador R el signo menos para indicar la dirección retroactiva del regulador respecto al sistema de regulación.

Con la expresión [1.2], se puede ver claramente en qué consiste el papel específico del regulador. Si no existiera el regulador ($R=0$), entonces la razón de transformación del sistema de regulación sería S. El regulador hace que se multiplique el segundo miembro de la ecuación $y=Sx$ por el factor $\frac{1}{1-SR}$ que caracteriza el funcionamiento del regulador. Esto se ve mejor aún cuando la fórmula [1.2] la expresamos de la manera siguiente:

$$y=\frac{1}{1-SR}Sx\,, \qquad [1.2c]$$

de la que resulta directamente que el primer factor que aparece en el segundo miembro de la expresión [1.2c], es decir $\frac{1}{1-SR}$, determina el funcionamiento del regulador y el segundo factor S, el funcionamiento del sistema regulado. El factor $\frac{1}{1-SR}$ expresa la acción de retroacción que se verifica en el sistema de regulación. Lo llamaremos *multiplicador (u operador) de la retroacción.* Multiplicando por dicho factor transformamos la razón de transformación del sistema regulado en la razón de transformación del sistema de regulación.

§ 3. El multiplicador keynesiano

Observemos que el multiplicador de la retroacción $\frac{1}{1-SR}$ se asemeja en su construcción al *multiplicador de Keynes,* que desempeña un papel fundamental en las consideraciones de este economista. Mostraremos que efectivamente el multiplicador de Keynes puede considerarse como un caso específico del multiplicador de la retroacción.

Recordemos que Keynes estudia la renta nacional Y en la cuantía global de los pagos netos (es decir, tras descontar la amortización de los medios de producción) en la economía nacional, como la suma de dos componentes: pagos destinados a la inversión A y pagos destinados a la compra de los bienes de consumo C. A este segundo componente lo considera como una función lineal de la renta

nacional, es decir $C=cY$, en la que c, denominada propensión marginal al consumo, cumple la condición $0<c<1$, lo que significa que no todo el ingreso nacional se gasta en consumo.

Tenemos entonces

$$Y=A+C=A+cY\,. \qquad [1.3]$$

De donde

$$Y=\frac{A}{1-c}=\frac{1}{1-c}A\,, \qquad [1.4]$$

y la expresión $\frac{1}{1-c}$ recibe el nombre de multiplicador de Keynes.

La analogía que existe entre la fórmula fundamental de la teoría de la regulación [1.2] y la fórmula [1.4] nos permite presentar una interpretación interesante del multiplicador keynesiano. No vamos a considerar en este trabajo la certeza de la teoría de Keynes y el problema de en qué medida realmente refleja el proceso de formación de la renta nacional en la economía capitalista. Nos interesa aquí solamente su aspecto metodológico, es decir, su construcción formal.

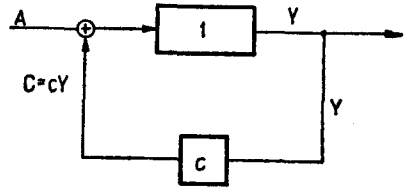


FIG. 8

Supongamos que tenemos un sistema en el que "entran", es decir sobre el cual influye una cierta inversión de magnitud $x=A$. La razón de transformación de este sistema es $S=1$, lo que significa que la inversión ocasiona gastos iguales a su valor en los fondos de la inversión A. El sistema se halla acoplado con el regulador de transformación $R=c$. Tras realizar la corrección con el regulador, al primer sistema entra finalmente la acción de magnitud $Y=A+cY$. Como resultado obtenemos un sistema de regulación como el descrito en el parágrafo anterior, con la particularidad de que la razón de transformación del sistema regulado en este caso tiene valor 1 y la razón de transformación del regulador, c. Esto se representa en el diagrama de bloque de la figura 8.

Observemos que el funcionamiento del sistema descrito de la regulación (Fig. 8), es idéntico al funcionamiento del sistema sin la retroacción de razón de transformación $\frac{1}{1-c}$, es decir, igual al multiplicador de Keynes (Fig. 9) [10].

Analicemos seguidamente cuál es la aplicación práctica de la fórmula fundamental de la regulación en la economía. Primero, todo el sistema de regulación, que se compone del sistema regulado S y el regulador R, puede sustituirse por un sistema de razón de transformación $\frac{S}{1-SR}$ (Fig. 10). Segundo, aprovechando la fórmula fundamental de la teoría de la regulación [1.2], se pueden realizar ciertos cálculos.

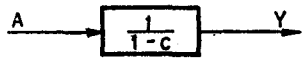


FIG. 9

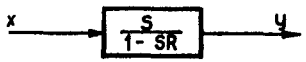


FIG. 10

Como ya se mencionó, si y debe tener el valor dado z, entonces la magnitud x (que representa la magnitud que regula el sistema de regulación) tiene que tener el valor [fórmula 1.2a]: $x=\frac{1-SR}{S}z$.

En el caso de un sistema cuya razón de transformación es igual al multiplicador keynesiano, y en el que el estado de la entrada significa la magnitud de inversión A, la fórmula anterior adopta la siguiente forma

$$A=(1-c)z\,. \qquad [1.5]$$

Se puede entonces realizar el siguiente cálculo. Supongamos que P significa la producción neta a la que corresponde el empleo aP, donde a es el coeficiente de trabajo necesario para la producción neta. Si N_0 representa el volumen de población que deseamos emplear, entonces es imprescindible asegurar la producción en la magnitud $P_0=\frac{N_0}{a}$. Para la realización de esta producción neta, el ingreso

[10] Dicho ejemplo confirma lo que hemos señalado en la introducción; que los economistas se ocupan de los problemas de la regulación y que, sin saberlo utilizan con frecuencia las fórmulas de la teoría de la regulación.

nacional (es decir la cuantía global de los pagos) tiene que ser equivalente a P_0. Es decir $Y=P_0$ [11].

El valor dado Y es igual a $z=P_0$. Sustituyendo en la fórmula [1.5] obtenemos

$$A=(1-c)P_0. \qquad [1.6]$$

Esto quiere decir que la magnitud de la inversión tiene que ser proporcional a la producción neta, dada o planeada, con lo que el coeficiente de proporcionalidad tiene el valor $1-c$.

Tomando como base la fórmula [1.2] se puede también determinar la razón de transformación del regulador R, necesaria para que con la razón de transformación del sistema regulado S y la magnitud que se regula x, conocidas, obtener el valor $y=c$. Es decir, la razón de transformación del sistema de regulación, como se ha demostrado, tiene que ser [fórmula 1.2b] $R=\frac{z-Sx.}{Sz}$.

Si a la razón de transformación del sistema de regulación le hacemos igual al multiplicador de Keynes y la magnitud que se regula es igual a la magnitud de la inversión, A, entonces

$$c=\frac{z-A}{z}. \qquad [1.7]$$

La fórmula [1.7] puede utilizarse en la solución del siguiente problema económico. La magnitud de la inversión A_0, viene dada y se fija el estado de la salida $z=Y=P_0$, que asegura el empleo N_0. Tenemos que determinar el valor de la propensión marginal al consumo c, es decir hallar qué parte de los ingresos de la población debe destinarse al consumo para que la tarea se cumpla.

Introduciendo los valores adecuados en la fórmula [1.7] obtenemos

$$c=\frac{P_0-A_0}{P_0}. \qquad [1.8]$$

[11] Si la cuantía de los pagos Y fuera menor al valor de la producción neta P_0, entonces para mantener el equilibrio sería necesario el aumento de los precios de las mercancías o su racionamiento. En cambio, si $Y<P_0$, entonces no se vendería toda la producción, ni se podría realizar el empleo en una magnitud N_0.

La fórmula [1.8] determina la razón de transformación del regulador que transforma el ingreso en gastos de consumo. Si la razón de transformación del regulador se corresponde con este valor, es decir, si logra influir en la distribución del ingreso de tal manera que el coeficiente de consumo c tenga un valor fijo [1.8], entonces se soluciona el problema presentado anteriormente, que determina la magnitud de la inversión y el empleo.

De la fórmula [1.2b] se deduce que para asegurar el valor determinado z con una magnitud fija x. que se regula, la razón de transformación del regulador tiene que ser directamente proporcional a la desviación (perturbación) $z-Sx$, la cual surgiría si no existiese el regulador, que es inversamente proporcional a Sz, es decir al valor de la magnitud correctora que sería necesaria a falta del regulador. En el caso del problema económico recientemente estudiado, cuya solución es la fórmula [1.8], resulta que la propensión marginal al consumo tiene que ser directamente proporcional a la diferencia entre la producción neta que corresponde al empleo dado y el valor fijo de la inversión, e inversamente proporcional a la mencionada producción neta.

§ 4. La regulación y el control. Tipos de control

La regulación tiene por objeto asegurar el funcionamiento del sistema de manera que toda desviación del estado de las salidas del sistema con respecto a su valor propuesto, es decir la norma, se compense. Esto exige, como hemos visto, una selección adecuada del valor corrector (alimentación) del sistema regulado o de la razón de transformación del regulador.

El valor dado, es decir la norma del estado de la salida del sistema de regulación, puede ser constante o puede ser también una variable. En el primer caso, cuando es constante, nos referimos a la *regulación simple* [12]. En el segundo caso se trata de la *regulación controlada* [13]. Por control queremos decir la determinación en

[12] La regulación simple se designa también con el nombre de *estabilización*, y el correspondiente del regulador, *estabilizador*.

[13] En este caso el regulador recibe el nombre de *timón* o controlador.

cada caso del valor variable z, es decir, la norma variable del sistema de la regulación. La regulación consiste por tanto en la corrección de las desviaciones del estado de la entrada del sistema de cada valor respecto a su norma variable. La regulación corresponde entonces a la compensación de las desviaciones respecto a la norma cuyo valor en cada caso está determinado por el control.

Pueden existir diferentes métodos para determinar la variabilidad de la norma z. Si z está determinada como una función dada cuya variable es el tiempo t, es decir, $z=f(t)$, entonces hablamos de *control programado,* y a la función $z=f(t)$ la denominamos *programa de control.* Un ejemplo de control programado es el movimiento de un barco sobre una trayectoria que está determinada por medio de las coordenadas geográficas de los puntos de dicha trayectoria. Conociendo la velocidad del barco se puede determinar la posición de éste en cada instante. El trayecto de esta forma determinado es el programa de control, y el timonel, o sea el regulador automático, determina las desviaciones eventuales de la ruta prevista compensándolas, llevando a cabo la tendencia a mantener el rumbo designado, es decir, el programa de control.

No es difícil poner un ejemplo económico de control programado. Cuando p. ej., $P(t)$ significa el programa de la producción neta en un período de diez años. Supongamos que se trata de determinar la función de la inversión $A(t)$ para, con una propensión marginal al consumo dada c, realizar el programa de la producción. De acuerdo con la fórmula [1.4], entre la función de la producción $P(t)$ y la inversión, tiene que darse la relación siguiente:

$$P(t)=\frac{1}{1-c}A(t),$$

de donde

$$A(t)=(1-c)P(t).$$

Otro ejemplo de control programado son las máquinas herramientas automáticas que, por lo general, están controladas según una cierta función del tiempo $z=f(t)$.

El valor de z no tiene por qué estar determinado como la función del tiempo. El valor de z puede ser función de otro valor que

representaremos por w. Decimos entonces que nos hallamos ante el *control rastreador,* ya que el funcionamiento del sistema dado está determinado por la magnitud z cuyo valor depende a su vez del rastreo de otra magnitud. La magnitud w se denomina *magnitud piloto* y la magnitud dada, es decir la norma z, *magnitud de alcance.* La magnitud de alcance z se halla determinada por la función de la magnitud piloto w, la cual "rastrea", es decir $z=f(w)$.

Un ejemplo del control rastreador es la determinación del rumbo de un barco de manera que navegue en forma tal, que la distancia respecto a tierra sea constantemente igual a 10 kilómetros. La ruta del barco es entonces una línea paralela, es decir, de igual distancia a la línea de la costa. Teniendo un mapa se puede elaborar una ruta del barco y aplicar un control programado. Si no tenemos el mapa y la tierra es visible, se puede aplicar el control rastreador, que en este caso consiste en realizar constantes mediciones de la distancia del barco a la costa. La tarea de la regulación es entonces la compensación de las desviaciones, es decir, la corrección de la ruta del barco cuando su distancia a tierra es mayor o menor de 10 kilómetros. La línea de la costa es aquí la magnitud piloto y la ruta del barco es la magnitud de alcance.

Consideremos otro ejemplo del control rastreador. Por dos tubos paralelos A y B fluye un líquido. La velocidad del flujo del líquido en el tubo B es la magnitud piloto w. El problema consiste en que la velocidad del flujo del líquido en el tubo A (magnitud de alcance) sea igual a la velocidad del flujo del líquido en el tubo B (magnitud piloto). La solución técnica de este problema, utilizando el método de control rastreador, exigiría la colocación en el tubo B de un "contador" C, es decir un aparato que midiese la velocidad del flujo del líquido en el tubo B y el aprovisionamiento del tubo A en un regulador automático R, aumentando o disminuyendo la velocidad del flujo del líquido en este tubo según las indicaciones del contador (fig. 11).

El conocido "problema de persecución" es también un ejemplo de control rastreador. Supongamos al perro P, que se encuentra en el momento inicial en un cierto punto del eje vertical z, cazando una liebre que corre a lo largo de un eje horizontal x en dirección positiva. El perro cambia constantemente de dirección, dirigiéndose

siempre hacia el punto en el cual, en un momento dado, se encuentra la liebre. Si el perro cambiase de dirección cada determinado lapso de tiempo, por ejemplo cada segundo, la ruta recorrida por él se compondría de una línea quebrada, tal como se representa en la figu-

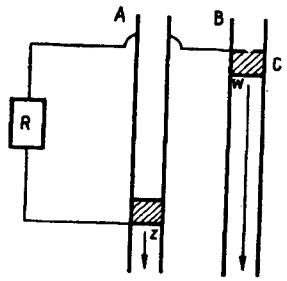


FIG. 11

ra 12a. En el límite, es decir, cuando el perro cambia de dirección en cada instante, la línea quebrada se convertiría en una línea continua, que lleva el nombre de *curva de persecución* (fig. 12b). La curva de persecución representa el efecto de un cuadro del proceso rastreador, puesto que su forma se halla determinada por el movimiento de una liebre que corre. Dicha curva tiene la propie-

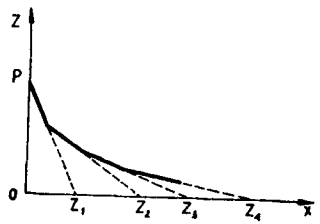


FIG. 12a

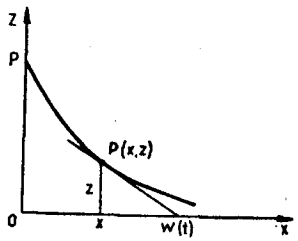


FIG. 12b

dad de que la tangente en cada uno de sus puntos indica la situación en la cual, en un instante dado, se encuentra la liebre.

El problema de la persecución sufriría un cambio si considerásemos que el perro no corre sin sentido en la dirección en que en un momento dado se encuentra la liebre, sino que, previendo lo que la liebre hará, corre sobre una línea recta y trata de alcanzarla corriendo por la ruta más corta, es decir, en el punto en que las

trayectorias de persecución del perro y la carrera de la liebre se cortan. El proceso de este tipo es un ejemplo de *control anticipado* sobre el cual hablaremos más adelante. Un control anticipado así, requiere del perro en este caso, el conocimiento de la función $w(t)$ del movimiento de la liebre. El conocimiento de esta función no es necesario al realizar la persecución normal no anticipada [14].

Propondremos, finalmente, un ejemplo del control rastreador aplicado a los problemas económicos. Como ya sabemos por el parágrafo anterior, el ingreso nacional Y (en el sentido de la suma global de los pagos) puede expresarse como función de la suma de la inversión: $Y=\frac{1}{1-c}A$, donde $\frac{1}{1-c}$ es el multiplicador keynesiano. Supongamos que deseamos obtener la renta Y a un nivel en el que, en cualquier momento de un determinado período (p. ej., el quinquenio) se hallaría asegurado el pleno empleo de la población. Representamos por $N(t)$ el volumen de población económicamente activa en el momento t, por $P(t)$ el valor de la producción en el momento t y por a el coeficiente de trabajo necesario de la producción neta en la economía nacional, que tomaremos como constante. Consideraremos también que la propensión marginal al consumo c no cambia en el período considerado. El problema que queremos resolver se reduce a determinar la magnitud de la inversión $A(t)$ en el momento t, para que exista constantemente pleno empleo, es decir, para que en cada instante se cumpla la igualdad:

$$z(t)=\frac{N(t)}{a}=P(t)=Y(t)\,.$$

Si el volumen de población que varía en el tiempo $N(t)$ lo tomamos como el valor guía conocido [15], entonces la solución del pro-

[14] Indicaremos aquí un principio utilizado por un avión (o barco) expuesto al fuego del enemigo y que consiste en rápidos cambios de la ruta (maniobras) determinados por el azar. Se trata de dificultar a los cañones el control anticipado y forzarlos a utilizar el control rastreador, lo que, debido al tiempo necesario para cambiar la posición de los cañones, disminuye la probabilidad de dar en el blanco.

[15] El volumen de población económicamente activa, tratado como función, puede obtenerse a partir de los pronósticos demográficos del incremento de población.

blema se reduce a la determinación de la magnitud de alcance $A(t)$, es decir, el programa de la inversión para el período considerado. A partir de la ecuación

$$\frac{N(t)}{a}=P(t)=\frac{1}{1-c}A(t)$$

obtendremos el resultado

$$A(t)=(1-c)\frac{N(t)}{a}.$$

Este ejemplo está simplificado porque no tiene en cuenta que en un período mayor de tiempo lo mismo el coeficiente de trabajo necesario, a, como la propensión marginal al consumo, c, sufren cambios, por lo que son funciones del tiempo: $a(t)$ y $c(t)$. Al conocer, sin embargo, los pronósticos que correseponden a esas magnitudes, el problema consistente en la determinación de $A(t)$ es posible resolverlo a partir de la ecuación anteriormente expuesta. Tendremos, pues,

$$A(t)=[1-c(t)]\cdot\frac{N(t)}{a(t)}.$$

condición que debe cumplirse en cada instante t.

Si $A(t)$, de acuerdo con esta fórmula, queda determinada en los instantes respectivos de t, a partir del valor $N(t)$ establecido en esos instantes, nos encontramos ante un simple control rastreador. Utilizando el pronóstico demográfico podemos, sin embargo, determinar los valores futuros $N(t)$ para un período (p. ej., 5 años), en este caso la ecuación expuesta permite determinar con anterioridad los valores $A(t)$, necesarios en ese período, es decir, planificar la inversión. Entonces el control se convierte en anticipado. Toda planificación económica consiste en un control anticipado.

Nos ocuparemos ahora del tercer tipo de control. Se presenta este tipo cuando no hay un valor guía determinado y la tarea del control consiste en hallar el valor de z (norma de funcionamiento del sistema) a partir del transcurso del control realizado hasta entonces. Expresado de forma diferente, el valor de z es una función de los estados alcanzados en los períodos o momentos anteriores. Este es el denominado *control adaptativo.*

Un caso muy importante del control adaptativo es el proceso de aprendizaje que consiste en sacar conclusiones de experiencias del pasado. Por lo tanto, el control adaptativo se denomina frecuentemente "proceso de aprendizaje". Algunas veces el control adaptativo se denomina también "proceso hereditario" *(hereditary process),* porque en el curso del proceso parece como si se "heredase" la experiencia obtenida anteriormente. El valor dado se determina a partir de la "herencia" del pasado.

Al realizar el control adaptativo la magnitud dada en el instante t —la representaremos por $z(t)$— es la función de los estados de la salida del sistema y, alcanzados en los instantes $t-\theta_1$, $t-\theta_2$, etcétera, es decir, los valores $y(t-\theta_1)$, $y(t-\theta_2)$, etc. Lo expresaremos en la siguiente forma:

$$z(t)=f[y(t-\theta_1), y(t-\theta_2), \ldots].$$

Existe también un cuarto tipo de control que consiste en que la magnitud dada (variable o constante) es el valor máximo o mínimo de cierta función (o su extremo). Casi siempre dicha función (o su extremo) contiene la magnitud de ajuste x y la razón de transformación S y R y varios parámetros suplementarios. Lo escribiremos en la forma $z=f(x, S, R,$ parámetros suplementarios), entonces $z=\max f(x, S, R,$ parámetros) o $z=\min f(x, S, R,$ parámetros).

A este tipo de control, cuando z es constante, se la denomina *control extremal u óptimo*[16].

Un ejemplo de este tipo de control es el proceso descrito anteriormente de la caza anticipada de una liebre por un perro, realizada de manera que el perro alcanzará a la liebre que, con una velocidad conocida, se le escapa a lo largo de una ruta (la línea recta o curva), corriendo por el camino más corto, o en el tiempo más corto. Otro ejemplo de control óptimo es la regulación de las revoluciones de una máquïna (o turbina) de vapor, para que su rendimiento técnico, es decir, la relación entre el trabajo realizado y la cantidad de ener-

[16] Una prueba de presentar sistemáticamente un control adaptativo que a la vez sea un control óptimo, la da R. Bellman, en *Adaptive Controle Processes,* Princeton 1961. Bellman demuestra que este tipo de control se puede adoptar en la solución de ciertos problemas de la programación dinámica.

gía consumida, para impulsar la máquina, fuese máxima. En los problemas económicos el control óptimo consiste frecuentemente en una selección de la norma dada, para llevar al mínimo el costo de funcionamiento del sistema o para obtener la renta máxima.

Los tipos de control mencionados se pueden también considerar de una manera uniforme de la forma siguiente. La norma variable de los sistemas de regulación es función de un parámetro determinado que llamaremos *criterio de control;* representando este parámetro por s tenemos la función $z=f(s)$. Si el parámetro es el tiempo, es decir, $s=t$, se efectúa el control programado. Si el parámetro es una magnitud determinada por cualquier otro proceso que tiene lugar fuera del proceso del sistema de regulación, se presenta el control rastreador; esta magnitud es la magnitud guía w del control y tenemos $s=w$. Si el parámetro es el estado anterior de la salida del sistema de la regulación (o conjunto de los estados anteriores) se nos presenta el control adaptativo. Si, finalmente, el parámetro s viene determinado por la condición de optimación $\max f(s)$ o $\min f(s)$, se efectúa el control óptimo. Los tipos individuales de control se hallan determinados por el carácter del parámetro s, que representa el criterio de control.

Generalizando nuestras consideraciones podemos suponer que la norma del sistema de regulación es una función del mayor número de parámetros. Tenemos entonces un criterio multiparamétrico de control y podemos referirnos al *control complejo.* Por ejemplo, el control puede ser programado bajo el aspecto de un parámetro (tiempo), puede ser control rastreador en relación a otro parámetro (magnitud guía), puede ser adaptativo en relación al tercer parámetro (debido a los estados de salida anteriores) y óptimo en cuanto al cuarto parámetro (que representa la condición de minimización de ciertos gastos o el esfuerzo). Un control complejo de este tipo caracteriza el desarrollo de los organismos vivos. El comportamiento del organismo (estado de sus salidas) depende de su edad (es decir, del tiempo como parámetro), de diferentes magnitudes guía determinadas por el ambiente, del comportamiento anterior de este organismo (estados de sus salidas anteriores), por ejemplo, de los reflejos condicionales adquiridos y también de ciertas magnitudes resultantes de determinadas condiciones extremas (p. ej., la minimización del esfuerzo). La regulación homeostática compensa las desviaciones con respecto a la norma de comportamiento determinada por los factores mencionados.

Merece la pena subrayar que cuando el criterio multiparamétrico de control contiene el parámetro que cumple una condición determinada de la optimación y, aparte de ello, contiene o el tiempo como parámetro o también el parámetro determinado por los estados anteriores de la salida del sistema, el control complejo es equivalente a la solución de cierto problema de programación dinámica.

§ 5. Operadores lineales

La fórmula fundamental de la teoría de la regulación $y=\dfrac{S}{1-SR}x$ se obtuvo con la condición de que S y R significasen las transformaciones proporcionales que se producen respectivamente en el sistema regulado y en el regulador; es decir, de que en ambos sistemas se realice una transformación que consiste en la multiplicación del estado de la salida por un número real S o R. Ahora demostraremos que la fórmula fundamental de la teoría de la regulación tiene un campo de aplicación mucho más amplio. La suposición de que en el sistema regulado y en el regulador se realiza solamente la transformación proporcional, puede sustituirse por una mucho más amplia. Con este objetivo nos ocuparemos en breve de describir los elementos del llamado *cálculo de operadores.*

Como se sabe, en cada sistema relativamente aislado se presenta la transformación del estado de entrada x por un estado de salida y, lo que escribiremos de manera simbólica $y=Tx$. Al símbolo T se le denomina *operador de la transformación,* que es la regla del procedimiento que determina qué es lo que debe hacerse con el estado de la entrada x, para obtener el estado de la salida del sistema y. Sobre estas reglas del procedimiento, es decir, sobre los operadores de la transformación, podemos realizar varias operaciones algebraicas. El conjunto de reglas para realizar las operaciones algebraicas sobre los operadores recibe precisamente el nombre de *cálculo de operadores.*

Vamos a considerar un estado especial de los operadores llamados *lineales*. Son estos los operadores que cumplen las dos condiciones siguientes:

1) $$T(cx)=cTx$$

2) $$T(x+v)=Tx+Tv,$$

para todos los valores x e y que pertenecen a un conjunto determinado, siendo c un valor constante.

La primera de estas condiciones significa que la realización de la transformación T sobre la magnitud cx (donde c es constante), es igual a la realización de la transformación T sobre el valor x multiplicando después el resultado obtenido por c. Expresado en forma diferente puede preceder al signo del operador un valor constante c.

La segunda condición significa que los operadores lineales tienen la propiedad aditiva, es decir, la realización de la transformación sobre la suma de los valores x y v es igual a la suma de la transformación, realizada sobre x y la transformación realizada sobre v.

El operador lineal más simple es el operador de la transformación proporcional que transforma el estado de la entrada x en el estado de la salida y mediante la multiplicación del estado de la entrada por cierto número real; es decir, que $y=kx$, donde k es una constante (real). La constante k recibe el nombre de *constante de transformación*. Se debe subrayar que el operador de la transformación proporcional no es idéntico a la constante k. El operador en el caso dado es una regla de procedimiento: "multiplica x por k".

Enunciaremos ahora los operadores lineales fundamentales. Estos son:

1. El operador de la *transformación proporcional*, o más simplemente, *operador de la proporcionalidad*, sobre el que ya se ha hablado. Consiste en la multiplicación del estado de la entrada x por un número constante real k.

2. El *operador de la diferencia*. Considerando que el estado de la entrada x es función de cierto parámetro t, es decir $x=f(t)$, dicho operador significa que para obtener el estado de la salida hay

que diferenciar la función que expresa el estado de la entrada, es decir, obtener su diferencial. El operador de la diferencia se señala con un símbolo $\frac{d}{dt}$ o, más simplemente, D. Mediante el cálculo diferencial sabemos que por el hecho de sacar la diferencial se cumplen las condiciones de linealidad de la transformación, porque $Dcx=cDx$ y $D(x+v)=Dx+Dv$.

3. El *operador de la integración*, que consiste en obtener el estado de la salida como una función primaria, es decir la integral del estado de la entrada $x=f(t)$. Dicho operador se representa por el símbolo de la integral indefinida $\int \ldots dt$. Es un operador lineal ya que, como es sabido, la constante puede preceder al signo integral y además la integral de la suma es igual a la suma de los integrales.

4. El *operador de las diferencias*, representado con el símbolo Δ. El sentido de este operador es el siguiente: Si el conjunto de los valores posibles de la entrada del sistema se puede representar por una serie $x_1, x_2 \ldots, x_n$, entonces el operador Δ transforma el estado de la entrada x_i en la diferencia $x_{i+1}-x_i$, es decir, $\Delta x_i=x_i=x_{i+1}-x_i$. Este operador es lineal porque $\Delta cx_i=cx_{i+1}-cx_i=c(x_{i+1}-x_i)=c\Delta x_i$ y también $\Delta(x_i+v_i)=x_{i+1}+v_{i+1}-x_i-v_i=\Delta x_i+\Delta v_i$.

5. El *operador de la suma* que representamos con el símbolo Σ, simplemente consiste en la suma de los estados de la entrada según cierto indicador i.

6. El *operador de adelantamiento* viene representado por el símbolo E. Si un conjunto de posibles valores de la entrada del sistema se puede ordenar en forma de sucesión monótona $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces el operador E transforma el estado de la entrada x_i en el estado de la salida x_{i+1}, por lo que $Ex_i=x_i+1$.

7. El *operador de retrasamiento*, similar al operador del movimiento, con que el estado de la entrada x_i se transforma en el estado de la salida x_{i-1}, lo representamos por E^{-1} y escribimos $E^{-1}x_i=x_i-1$. No es difícil demostrar que los tres últimos operadores son lineales.

En la técnica los diferentes sistemas que corresponden a estos operadores fundamentales, es decir los aparatos, se llaman correlativamente aparato proporcional (dependiendo de las circunstancias

el que sea amplificador o reductor), aparato de diferenciación o diferenciador, aparato para integrar o integrador, aparato para adelantamiento o aparato para retrasamiento (en ciertas circunstancias lo llamamos también aparato retardante).

La definición de una *suma de dos operadores* puede expresarse como sigue:

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x\,. \qquad [1.9]$$

Esto significa que la suma de los operadores T_1 y T_2, aplicada a x, da el mismo resultado que aplicar una vez el operador T_1 a x y luego aplicar el operador T_2, también a x y sumar los resultados obtenidos.

Análogamente expresaremos la definición de la *diferencia de dos operadores*

$$(T_1-T_2)x=T_1x-T_2x\,. \qquad [1.10]$$

La definición del *producto de dos operadores* T_2 y T_1, determina la siguiente ecuación:

$$T_2T_1x=T_2(T_1x)\,, \qquad [1.11]$$

lo que significa que el producto de los operadores T_2 y T_1, aplicado a x, consiste en la realización en x de la transformación T_1 y posteriormente sobre el resultado obtenido la transformación T_2. Hay que subrayar que la multiplicación de los operadores no siempre es intercambiable, es decir, la realización sobre x de, primero la transformación T_1 y después sobre el resultado la realización de la transformación T_2, puede dar otro resultado que la realización primero de la transformación T_2 y luego de la transformación T_1 [17].

La *segunda potencia del operador* se determina por medio de la multiplicación de los operadores iguales:

$$T^2x=T(Tx)\,. \qquad [1.12]$$

[17] Por ejemplo, la multiplicación de los operadores de la transformación proporcional es intercambiable, pero no lo es la multiplicación de los operadores de la transformación, que consiste en la multiplicación de un vector por una matriz a la que se puede considerar como cierta generalización de la transformación proporcional. Asimismo, no siempre es intercambiable la multiplicación de los operadores de diferenciación. Si, por ejemplo, tenemos la función $f(x, y)$ y señalamos por D_x el operador de la diferenciación con respecto a x, y por D_y el operador de la diferenciación con respecto a y, entonces $D_xD_y=D_yD_x$ tan sólo en el caso en que la diferencial $D_xD_y\,f(x, y)$ es continua.

Utilizando el método de inducción se puede explicar fácilmente lo que significa la *potencia del operador:* T^nx, donde n es un número natural. Consiste en multiplicar n veces la operación de la misma transformación.

Al símbolo $\frac{1}{T}$ o T^{-1} le llamamos *operador de la transformación inversa.* El significado de este operador es que si T es el operador de la transformación que transforma x en y, entonces T^{-1} es el operador de la transformación que transforma y en x, de manera que si $y=Tx$, entonces $x=T^{-1}y$.

La definición del operador T^{-1} hace posible la determinación de la división de los operadores, a saber:

$$T_1 : T_2=T_1\cdot T_2^{-1}\,. \qquad [1.13]$$

Introduciremos finalmente el símbolo de la *transformación idéntica* T^0, que también representaremos por I. La transformación idéntica cambia un valor dado x en el mismo valor x, así que $T^0x=Ix=x$. Si la transformación es una transformación proporcional, I es un operador de la transformación que consiste en la multiplicación por 1. En tal caso podemos escribir $I=1$. Este método le aplicaremos también en otros casos, cuando no induzca a error.

De la definición del operador de la transformación inversa resulta que

$$T\,T^{-1}=T^{-1}\,T=T^0=I\,, \qquad [1.14]$$

puesto que tenemos

$$y=Tx=T\,T^{-1}\,y=y\,,$$

y también

$$x=T^{-1}\,y=T^{-1}\,Tx=x\,.$$

Las operaciones expuestas anteriormente sobre los operadores, hacen posible una mutua sustitución de algunos de los operadores fundamentales lineales mencionados y, así, el operador de la integración se puede sustituir por el operador inverso con respecto al operador de la diferenciación, puesto que tenemos que $\int \ldots dt=D^{-1}$.

Asimismo, el operador del atrasamiento es igual al operador inverso con respecto al operador del adelantamiento, lo que hemos subrayado representándolo con un símbolo E^{-1}.

El operador de formación de las diferencias finitas se puede expresar por medio del operador de adelantamiento. En efecto

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = Ex_i - x_i = (E-1)x_i ,$$

de manera que $\Delta \equiv E-1$ ó $E \equiv \Delta + 1$.

La expresión $\Delta \equiv E-1$ significa que el operador de formación de las diferencias finitas es igual a la diferencia entre el operador de adelantamiento y el operador de la transformación idéntica.

Asimismo el operador de la suma se puede expresar por medio del operador de adelantamiento. Como tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + Ex_1 + E^2 x_1 + \ldots + E^{n-1} x_1 =$$

$$= (1 + E + E^2) \ldots + E^{n-1}) x_1 = \frac{E^n - 1}{E-1} x_1$$

podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{n} \equiv \frac{E^n - 1}{E-1} .$$

De esta manera los siete operadores lineales fundamentales anteriormente mencionados, podemos limitarlos a tres, que vamos a definir como los *operadores lineales elementales*. Los demás operadores pueden expresarse por medio de éstos. Como operadores elementales tomaremos el operador de la proporcionabilidad, el operador de la diferenciación y el operador del adelantamiento.

Demostraremos ahora que la fórmula fundamental de la teoría de la regulación $y = \dfrac{S}{1-SR} x$ es efectiva en todas las transformaciones que tengan lugar en cualquier sistema regulado y en el regulador cuyos operadores sean lineales.

Supongamos que en el sistema regulado ocurre cualquier transformación $y = Sx$, en que el operador de la transformación S es un operador lineal. Introduciendo por medio de la retroacción un regulador en el que se realiza la transformación $\Delta x = Ry$, siendo también R un operador lineal obtendremos un sistema de regulación en el que ocurre la transformación siguiente:

$$y = S(x + \Delta x) = S(x + Ry) .$$

Puesto que los dos operadores S y R son lineales, tendremos por lo tanto

$$y = S(x + Ry) = Sx + SRy$$

o

$$y - SRy = Sx .$$

De aquí se deduce que $(I - SR)y = Sx$.
y representado simbólicamente $I = 1$.

$$y = \frac{S}{1-SR} x .$$

Esta expresión es la fórmula fundamental de la teoría de la regulación. Hemos demostrado por tanto que la fórmula es verdadera si los operadores S y R son lineales.

Las técnicas actuales de la regulación y del control casi siempre se basan en la fórmula fundamental anteriormente enunciada; parten de la suposición de la linealidad de los operadores de transformación que se verifican en el sistema regulado y en el regulador. La regulación o el control, basado en esta suposición, se llama *regulación lineal* o *control lineal.*

Matemáticametne es mucho más difícil la *teoría de la regulación no lineal.* No nos ocuparemos aquí de ella.

Mediante el ejemplo de la demostración de la fórmula fundamental de la teoría de la regulación se observa en qué consiste la comodidad de servirse del cálculo de operadores. El resultado es que sobre los operadores pueden realizarse operaciones algebraicas y obtener fórmulas como si los operadores fueran números. Esto permite subordinar a los operadores ciertos números (o vectores). Tomemos la transformación $y = Tx$, donde x e y son números (o vectores). Entonces podemos expresar simbólicamente $T = \dfrac{y}{x}$. A la relación de los números (o vectores) $\dfrac{y}{x}$ subordinamos el opera-

dor T. A esta relación la denominamos *razón de transformación del operador* o, más brevemente, razón de la transformación $y=Tx$.

En el sistema de regulación aparece la razón de transformación del sistema regulado $S=\frac{y}{x}$ y la del regulador $R=\frac{\Delta x}{y}$. La fórmula fundamental de la teoría de la regulación demuestra que el sistema compuesto de un sistema regulado y de un sistema regulador puede sustituirse por un solo sistema en el cual se realiza una transformación $y=Tx$ cuya razón es $T=\frac{y}{x}=\frac{S}{1-SR}$. A esta razón la denominamos, como lo hemos hecho hasta ahora, razón del sistema de regulación, con la condición de que realmente aquí se trate de una razón de transformación del operador.

§ 6. Interpretación cibernética de las operaciones en los operadores

Estudiemos una situación en que cierto estado x es la entrada de dos sistemas de operadores lineales T_1 y T_2, siendo el resultado del estado x dos estados de salida y_1 e y_2, que se suman, representándose esta suma por y. A los acoplamientos de esta clase, de dos sistemas, los denominaremos *acoplamiento en paralelo* (Fig. 13).

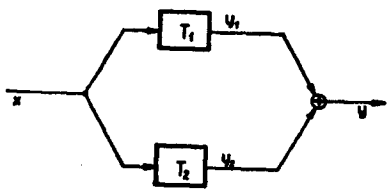


FIG. 13

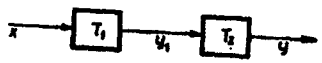


FIG. 14

El cálculo de la transformación se presenta de la manera siguiente:

$$y_1=T_1 x \quad \text{y} \quad y_2=T_2 x,$$

de donde

$$y=y_1+y_2=T_1 x+T_2 x=(T_1+T_2)x.$$

El resultado de este cálculo se puede expresar en forma de una transformación $y=Tx$ en que $T=T_1+T_2$.

De esta manera podemos enunciar la siguiente tesis: *el operador de la transformación en que se hallan acoplados dos sistemas en paralelo es igual a la suma de los operadores de dichos sistemas.*

Esta tesis puede generalizarse por medio del método de inducción a un número indefinido o limitado de sistemas acoplados en paralelo.

Estudiemos ahora el llamado *acoplamiento en serie* de dos sistemas, con los operadores lineales T_1 y T_2, presentados en la figura 14. Con el acoplamiento en serie, el estado de salida de un sistema se convierte en el estado de entrada del segundo sistema. Tenemos entonces $y_1=T_1x$ e $y=T_2y_1$. Sustituyendo en la segunda transformación y por su valor en la primera obtenemos $y=T_2T_1x$. Esto equivale a una transformación $y=Tx$ cuyo operador es $T=T_1T_2$.

Podemos, pues, enumerar la siguiente tesis: *el operador que corresponde al acoplamiento en serie de dos sistemas es igual a la multiplicación de los operadores de estos sistemas.* Y esta tesis se puede generalizar por el método de inducción a un número indefinido o limitado de sistemas acoplados en paralelo.

En la técnica el acoplamiento en serie del mayor número de sistemas lleva muchas veces el nombre de *acoplamiento en cascada.* Dicho nombre proviene de que en este acoplamiento de los sistemas, la transformación de la entrada principal x pasa por una fila de "cascadas" que corresponde a los sistemas de acoplamiento en serie.

Puesto que, como hemos visto, a los operadores lineales se les puede subordinar la razón de transformación de un operador de sucesivas transformaciones, las dos tesis anteriormente enunciadas se pueden expresar también de la siguiente manera: primera tesis, *la razón de transformación total de los sistemas acoplados en paralelo es igual a la suma de las razones de transformación de dichos sistemas,* y la segunda tesis, *la razón de transformación total de los sistemas acoplados en serie es igual a la multiplicación de la razón de transformación de dichos sistemas.*

Vamos a considerar ahora el tercer tipo de acoplamiento al que ya se ha aludido, es decir, el *acoplamiento reversivo,* presentado en la figura 15. Representamos la transformación en dos sistemas aco-

plados por $y=T_1x$ e $\Delta x=T_2y$. Tenemos entonces la fórmula ya conocida

$$y=\frac{T_1}{1-T_1T_2}x\,.$$

Esto equivale a una transformación $y=Tx$, donde $T=\dfrac{T_1}{1-T_1T_2}$. La comunicación inversa de dos sistemas conduce así a la multiplicación del operador del primer sistema T_1 por $\dfrac{1}{1-T_1T_2}$. En este último "multiplicador" consiste el *operador de la retroacción*. En el caso de que las transformaciones sean proporcionales, este operador equivale a un multiplicador de la retroacción sobre el que ya se ha hablado anteriormente.

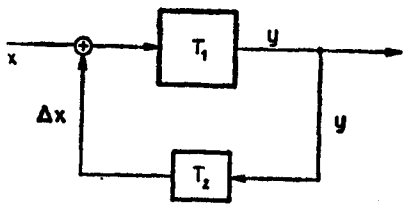


FIG. 15

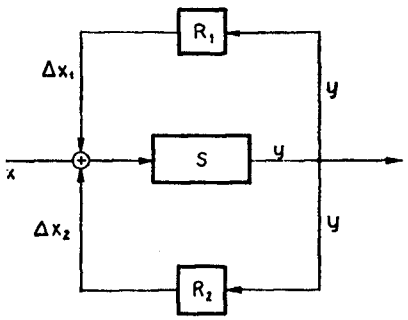


FIG. 16

Nos ocuparemos ahora de dos acoplamientos más complicados del sistema. En primer lugar, supondremos que existe un sistema regulado al que corresponde el operador x y acoplados con él se hallan dos sistemas reversivos paralelos, es decir, dos reguladores de operadores R_1 y R_2 (fig. 16). Realicemos ahora el cálculo de operadores; el resultado general de este sistema de regulación puede expresarse en forma de una transformación $y=Tx$. Representando Δ_1x e Δ_2x, el estado de la salida del primero y segundo regulador, respectivamente; es decir, $\Delta_1x=R_1y$ e $\Delta_2x=R_2y$, obtendremos que

$$y=S(x+\Delta_1x+\Delta_2x)=S(x+R_1y+R_2y)=Sx+SR_1y+SR_2y\,.$$

De aquí se deduce que

$$y(1-SR_1-SR_2)=Sx$$

y también

$$y=\frac{S}{1-S(R_1+R_2)}x\,. \qquad [1.15]$$

En dicho caso el operador resultante de todo el sistema de regulación es $T=\dfrac{S}{1-S(R_1+R_2)}$.

El resultado obtenido es el mismo que si dos reguladores acoplados en paralelo sustituyeran al regulador del operador $R=R_1+R_2$. Esto significa que a cambio de dos reguladores acoplados en paralelo se puede utilizar uno solo de una razón de transformación

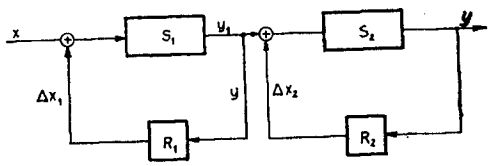


FIG. 17

igual a la suma de las razones de transformación de dichos reguladores. Esta tesis se puede generalizar sobre un número indefinido o limitado de reguladores acoplados en paralelo.

En segundo lugar supondremos que el sistema de regulación se compone de dos sistemas, S_1 y S_2, regulados entre sí, acoplados en serie, con lo que cada uno de estos sistemas se halla provisto de un regulador, acoplado inversamente a los operadores R_1 y R_2 (figura 17). Al estado de entrada del primer sistema le representamos por x_1, al estado de su salida por y_1 y al estado de salida del segundo sistema por y.

El resultado general del funcionamiento de un sistema complejo lo expresaremos en forma de una transformación $y=Tx$. Mediante las tesis anteriormente demostradas, tenemos

$$y_1=\frac{S_1}{1-S_1R_1}x \quad \text{e} \quad y=\frac{S_2}{1-S_2R_2}y_1\,.$$

Como resultado obtenemos

$$y=\frac{S_2}{1-S_2R_2}\cdot\frac{S_1}{1-S_1R_1}x\,. \qquad [1.16]$$

Con lo que el operador resultante del sistema considerado de la regulación es

$$T=\frac{S_2}{1-S_2R_2}\cdot\frac{S_1}{1-S_1R_1}\,.$$

Los ejemplos analizados de los sistemas complejos pueden corresponder a problemas económicos concretos. El ingreso nacional Y, considerado como la suma total de los pagos en la economía nacional, puede dividirse en tres componentes: $Y=C+I+A$, donde C significa la magnitud del consumo; I, las inversiones secundarias que dependen de la cuantía del ingreso nacional[18], y A, las inversiones autónomas, cuya magnitud se determina independientemente de la cuantía de la renta nacional.

Supongamos $C=c_1Y$ e $I=c_2Y$, con lo que tanto la propensión marginal al consumo $0<c_1<1$ como el coeficiente de la inversión secundaria $0<c_2<1$ y, por otra parte, haremos que $c_1+c_2<1$. Tenemos entonces $Y=c_1Y+c_2Y+A$, de donde

$$Y=\frac{1}{1-(c_1+c_2)}A\,. \qquad [1.17]$$

Se deduce de esto que el operador de la transformación $y=TA$, que se efectúa en el sistema complejo considerado es $T=\frac{1}{1-(c_1+c_2)}$. Igualmente la expresión $\frac{1}{1-(c_1+c_2)}$ es la forma ampliada del multiplicador keynesiano. El diagrama de bloques de este sistema se halla representado en la figura 18. De dicho diagrama se deduce

[18] En la economía capitalista, la cuantía de la renta nacional determina la rentabilidad de la producción que, a su vez, determina la cuantía de las inversiones secundarias. En la economía socialista, entre las inversiones y el ingreso nacional existe una relación independiente, directa, funcional, puesto que al lograrse cierto nivel en los ingresos se hace posible la planificación de determinadas inversiones.

que en el sistema regulado se realiza una transformación proporcional, idéntica al operador $S=1$; esto significa que las inversiones autónomas se transforman en una renta del mismo nivel que las inversiones. En el sistema regulado se hallan acoplados en paralelo dos reguladores de operadores c_1 y c_2. Como se deduce de las consideraciones anteriores este conjunto de sistemas puede sustituirse por un sistema complejo compuesto de sistema regulado y solamente de un regulador $c_1+c_2=c$. Entonces el multiplicador keynesiano toma su forma anterior $\frac{1}{1-c}$, siempre que c sea la suma del coeficiente del consumo y el coeficiente de las inversiones secundarias.

Al conjunto compuesto de dos sistemas acoplados en serie, de operador $S=1$ y de los cuales cada uno tiene el regulador de operadores, respectivamente, c_1 y c_2 (Fig. 19), se le puede dar la siguiente interpretación económica. En el primer sistema regulado y en el regulador que le corresponde se realiza la siguiente transformación: $Y_1=c_1Y_1A$, es decir, $Y_1=\frac{1}{1-c_1}A$. Este sistema lo presenta un país cuando obtiene créditos del exterior en proporción c_2Y_1; entonces el crédito del exterior es proporcional a la renta nacional alcanzada dentro del país. Este factor suplementario, es decir, el crédito del exterior, origina la transformación que se realiza en el otro sistema regulado y en su regulador, es decir $Y=Y_1+c_2Y$, o lo que es lo mismo: $Y=\frac{1}{1-c_2}Y_1$.

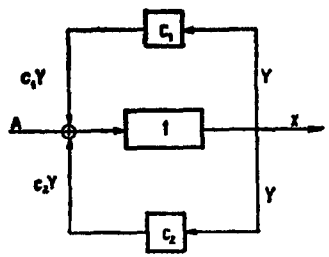


FIG. 18

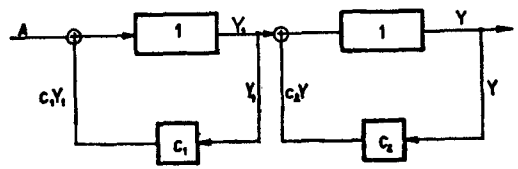


FIG. 19

Sustituyendo en la última fórmula $Y_1=\frac{1}{1-c_1}A$, obtenemos

$$Y=\frac{1}{1-c_2}\cdot\frac{1}{1-c_1}A. \qquad [1.18]$$

Como puede observarse, el operador resultante del sistema compuesto considerado $T=\frac{1}{1-c_2}\cdot\frac{1}{1-c_1}$ es la multiplicación de los multiplicadores de los dos sistemas de regulación acoplados en serie.

De las consideraciones anteriormente presentadas, extraeremos ciertas conclusiones generales. Aplicando la interpretación cibernética de las operaciones sobre los operadores, como representantes de diferentes clases de acoplamientos, se puede calcular el operador de la acción resultante de todo el conjunto de los sistemas. De aquí se deduce que cada sistema cuyo operador se puede presentar en forma de suma, diferencia, multiplicación o división de otros operadores es, en realidad, un conjunto de sistemas acoplados de cierta forma entre sí.

En el parágrafo anterior hemos demostrado que los operadores lineales se pueden llevar a los tres operadores elementales, a saber:

1) el operador de la proporcionalidad, es decir, de la multiplicación del estado de la entrada por un número dado k,
2) el operador diferencial D, y
3) el operador de adelantamiento E.

Todos los demás operadores fundamentales pueden expresarse como un resultado de operaciones efectuadas sobre los operadores elementales. Aplicando en particular la transformación inversa, obtendremos:

1) el operador de la proporcionalidad inversa k^{-1},
2) el operador de la integración D^{-1}, y
3) el operador del retroceso E^{-1}.

A estos sistemas en los cuales se realiza solamente la transformación determinada por el operador elemental o la transformación inversa con respecto a ella, los denominamos *sistemas elementales* o *elementos*.

De esta manera todos los sistemas o elementos forman o son un

conjunto de elementos acoplados entre sí de una manera determinada, puesto que cada operación algebraica sobre los operadores elementales puede ser interpretada como un acoplamiento de elementos adecuados.

Presentaremos además la interpretación cibernética del operador de la transformación inversa, representado por el símbolo T^{-1}. La transformación inversa significa que si $y=Tx$, entonces $x=T^{-1}y$. En el diagrama de bloques puede indicarse, como en la figura 20.

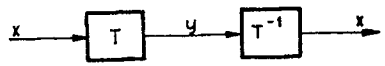


FIG. 20

El resultado $T^{-1}T=I$, es decir, la multiplicación del operador T por el operador T^{-1}, es el operador de la transformación idéntica que transforma x en x.

Finalmente, ¿qué significa en el diagrama cibernético de bloques la *transformación cero* o *transformación nula?* Dicha transformación se puede expresar en forma $y=(T-T)x=0$. Su interpretación se ha expuesto en la figura 21. Como puede observarse, la

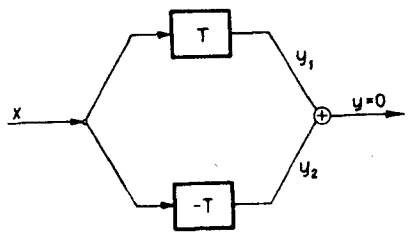


FIG. 21

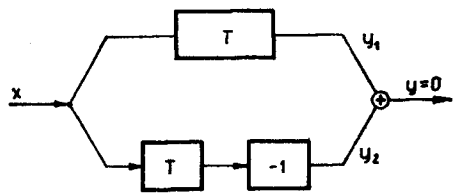


FIG. 22

transformación nula es un acoplamiento en paralelo del sistema de operador T con un sistema de operador $-T$. El operador $-T$ puede interpretarse como el resultado del acoplamiento en serie del sistema del operador T con un sistema de operador proporcional -1. Por último, el esquema de bloques de la tarnsformación nula se puede presentar en forma de un diagrama como en la figura 22, que representa las conexiones de los sistemas elementales.

CAPÍTULO II

ESQUEMAS CIBERNETICOS DE LA TEORIA DE LA REPRODUCCION

§ 1. Esquema de la reproducción simple

En este capítulo nos ocuparemos del análisis cibernético y de la interpretación de los esquemas de la reproducción de Marx. Analizaremos, en primer lugar, el problema en su conjunto, para toda la economía nacional y tendremos en cuenta después la división de la economía en dos sectores considerando, finalmente, el problema de forma general, suponiendo que la economía nacional se divide en n sectores.

El producto global X expresado en unidades de valor puede determinarse como la suma de tres componentes:

$$X=c+(v+m)\,. \qquad [2.1]$$

El primer componente c significa la magnitud de los gastos de los medios de producción, necesarios para formar el producto X y la suma $(v+m)$ constituye los gastos de trabajo humano [1].

Introduciremos en nuestras consideraciones los denominados *coeficientes de gastos* de los medios de producción y el trabajo humano, según las fórmulas siguientes:

$$a_c=\frac{c}{X} \quad \text{y} \quad a_{v+m}=\frac{v+m}{X} \qquad [2.2]$$

(con lo que $a_c+a_{v+m}=1$).

[1] La división de los gastos del trabajo humano en dos componentes, v y m, no es importante en este lugar.

Por tanto, la fórmula [2.1] se puede expresar en la forma:

$$X=a_c X+(v+m)$$

o bien

$$(1-a_c)\,X=v+m\,.$$

De donde

$$X=\frac{1}{1-a_c}(v+m)\,. \qquad [2.3]$$

Mediante la fórmula [2.3], que representa el proceso de la creación del valor, se observa que en este proceso aparece cierta *retroacción*. Efectivamente, el proceso de la creación del valor puede representarse por medio del diagrama cibernético de bloques que aparece posteriormente (Fig. 23).

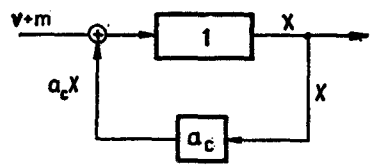


FIG. 23

Se deduce a partir de la figura 23 que el trabajo humano $v+m$ se transforma en el producto X, y esta transformación de identidad se representa por el símbolo 1. Incluido en el sistema regulado se halla un regulador de operador de proporcionalidad, a_c cuya existencia proviene de que una parte del producto X tiene que dedicarse a la reproducción de los medios productivos utilizados. La transformación se realiza en un sistema de regulación determinado precisamente por la fórmula [2.3].

Supongamos que la economía nacional se encuentra dividida en dos sectores: el sector I representa la producción de los medios productivos y el sector II la producción de los medios de consumo. Las fórmulas que determinan los productos globales de cada uno de los sectores de la economía nacional los expresamos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} X_1&=c_1+(v_1+m_1)=a_{1c}\,X_1+(v_1+m_1)\\ X_2&=c_2+(v_2+m_2)=c_2+a_{2(v+m)}\,X_2\,. \end{aligned} \qquad [2.4]$$

En las fórmulas [2.4], a_{1c} representa el coeficiente de los costes de los medios de producción en el sector I y $a_{2(v+m)}$ el coeficiente de los costes del trabajo humano en el sector II. Sabemos que la condición de equilibrio del proceso de la reproducción simple viene dada por

$$c_2 = v_1 + m_1 . \qquad [2.5]$$

Esta condición significa que el valor de los medios de producción, que el sector II toma del sector I, es decir, v_1+m_1, debe ser igual al valor de los medios del consumo [2], es decir, c_2 transmitidos del sector II al sector I.

A partir de las ecuaciones [2.4] obtenemos las fórmulas transformadas para la magnitud global de la producción de los medios productivos y de la producción de los medios de consumo:

$$X_1 = \frac{1}{1-a_{1c}}(v_1+m_1)$$

$$X_2 = \frac{1}{1-a_{2(v+m)}} c_2 , \qquad [2.6]$$

que corresponden a las transformaciones expresadas en forma de diagramas de bloques para el sector I en la figura 24 y para el sector II en la figura 25.

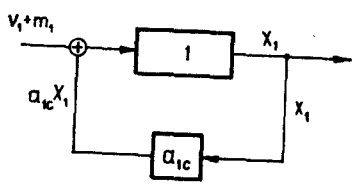


FIG. 24

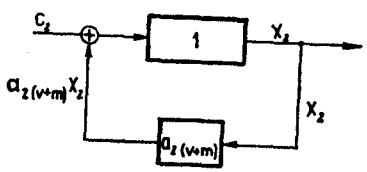


FIG. 25

Calculemos mediante las fórmulas [2.6] la relación de los valores de los productos globales en ambos sectores. Teniendo en cuenta

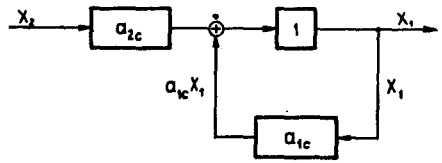
[2] Se pueden hallar unas consideraciones más detalladas sobre este tema en el libro de O. Lange, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, PWN, Varsovia 1961, pág. 36 y sgs.

la condición de equilibrio [2.5] y considerando que

$$a_{2c} + a_{2(v+m)} = \frac{c_2}{X_2} + \frac{v_2+m_2}{X_2} = 1$$

obtendremos

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1-a_{2(v+m)}}{1-a_{1c}} = \frac{a_{2c}}{1-a_{1c}} .$$



De donde se deduce

$$X_1 = \frac{a_{2c}}{1-a_{1c}} \cdot X_2 . \qquad [2.7]$$

FIG. 26

La transformación [2.7] se puede también expresar en forma de diagrama de bloques según la figura 26. A dicho diagrama se le puede dar la siguiente interpretación económica.

Supongamos que vamos a producir X_2 medios de consumo y queremos saber cuál es la cantidad necesaria de medios de producción para que el proceso de la reproducción simple esté equilibrado, es decir, para que pueda realizarse el plan previsto. Para producir X_2 de los medios de consumo es imprescindible $c_2 = a_{2c}X_2$ medios de producción, donde a_{2c} es un coeficiente de los costes de los medios de producción en el sector II. Esta transformación se realiza en el sistema de operador a_{2c}. Sin embargo, para la producción $c_2 = a_{2c}X_2$ de medios de producción, es necesaria nuevamente cierta cantidad de medios productivos, pues al sistema así considerado debe acoplarse en serie, por medio de la retroacción, un sistema de regulación (regulador) cuyo operador, como puede deducirse de la fórmula [2.7] es igual $a_{1c} = \frac{c_1}{X_1}$, es decir, el coeficiente de los costes de los medios de producción en el sector I.

De manera análoga se puede obtener la relación entre la magnitud del producto global del sector II y la magnitud del producto global del sector I:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{a_{1(v+m)}}{1-a_{2(v+m)}}$$

de donde se deduce

$$X_2 = \frac{a_{1(v+m)}}{1 - a_{2(v+m)}} X_1 \qquad [2.8]$$

El diagrama de bloques que corresponde a la transformación [2.8] se halla representado en la figura 27.

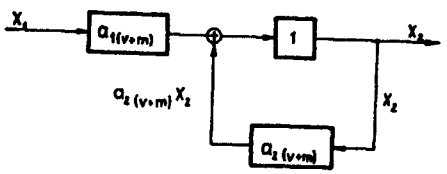


FIG. 27

La fórmula [2.8] y el diagrama de bloques presentado en la figura 27 tiene la siguiente interpretación económica. Supongamos que planificamos la producción de X_1 medios de producción y queremos determinar qué cantidad de medios de consumo es necesaria para la realización de este plan. Para producir X_1 medios de producción es imprescindible poseer medios de consumo en cantidad $v_1 + m_1 = a_{1(v+m)} X_1$. Pero, a su vez, para que estos medios de consumo se produzcan, es imprescindible una cantidad suplementaria de medios de consumo. Respecto a esta cuestión, en el sistema de regulación aparece un sistema acoplado con la retroacción del operador $a_{2(v+m)} = \frac{v_2 + m_2}{X_2}$, es decir, el coeficiente de los costos del trabajo humano en el sector II.

§ 2. Esquema de la reproducción ampliada

Nos ocuparemos ahora del análisis cibernético de los esquemas de la reproducción ampliada, considerando, como en el parágrafo anterior, que la economía nacional se divide en dos sectores.

Los esquemas de Marx, en el caso de la reproducción ampliada, se pueden expresar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} c_1 + v_1 + m_{1c} + m_{1v} + m_{10} &= X_1 \\ c_2 + v_2 + m_{2c} + m_{2v} + m_{20} &= X_2 . \end{aligned} \qquad [2.9]$$

En la primera de estas fórmulas m_{1c} y m_{1v} significan las partes del valor del producto suplementario[3] del sector I, que están destinadas a aumentar la cantidad de los medios de la producción, a reservas y a utilizar en la producción una fuerza de trabajo suplementaria; en cambio, m_{10} es la parte del valor del producto suplementario del sector I que se consume improductivamente. Significado análogo poseen las magnitudes m_{2c}, m_{2v} y m_{20}. Las demás magnitudes de la fórmula [2.9] poseen el mismo sentido que en el parágrafo anterior.

Es muy útil agrupar los componentes que aparecen en el primer miembro de las fórmulas [2.9], de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} & c_1 + m_{1c} + \overline{| v_1 + m_{1v} + m_{10} |} = X_1 \\ & \underline{| c_2 + m_{2c} |} + v_2 + m_{2v} + m_{20} = X_2 . \end{aligned} \qquad [2.9a]$$

En la primera de estas expresiones la suma $c_1 + m_{1c}$ significa la demanda total del sector I, para los medios de producción, y la suma $v_1 + m_{1v} + m_{10}$, la demanda total del sector I para los medios de consumo. De las fórmulas [2.9a] se desprende también la conocida condición de equilibrio en el caso de la reproducción ampliada:

$$c_2 + m_{2c} = v_1 + m_{1v} + m_{10}, \qquad [2.10]$$

lo cual significa que la demanda del sector II de los medios de producción $c_2 + m_{2c}$, es igual a la demanda del sector I de los medios de consumo de los trabajadores ya empleados, más la demanda del nuevo $v_1 + m_{1v}$ y el consumo improductivo m_{10} de una parte del valor del producto suplementario.

Introduciendo el coeficiente de los gastos de los medios de producción en el sector I: $a_{1c} = \frac{c_1}{X_1}$, el coeficiente de acumulación de los medios de producción en el sector I: $\alpha_{1c} = \frac{m_{1c}}{X_1}$; el coeficiente

[3] El utilizar aquí el término "valor del producto suplementario" permite la interpretación de las fórmulas [2.9] y de las siguientes, lo mismo en la economía socialista que en la capitalista.

de los gastos del trabajo humano en el sector II: $a_{2v}=\frac{v_2}{X_2}$; el coeficiente de acumulación del capital variable (es decir, de los medios de consumo para aumentar el empleo) en el sector II: $\alpha_{2v}=\frac{m_{2v}}{X_2}$ y la base del consumo improductivo del valor del producto suplementario en el sector II: $\alpha_{20}=\frac{m_{20}}{X_2}$, las fórmulas [2.9a] se pueden expresar en la siguiente forma:

$$a_{1c}X_1+\alpha_{1c}X_1+v_1+m_{1v}+m_{10}=X_1$$
$$c_2+m_{2c}+a_{2v}X_2+\alpha_{2v}X_2+\alpha_{20}X_2+\alpha_{20}X_2=X^2. \qquad [2.9b]$$

De aquí se deduce

$$X_1=\frac{1}{1-(a_{1c}+\alpha_{1c})}(v_1+m_{1v}+m_{10})$$
$$X_2=\frac{1}{1-(a_{2v}+\alpha_{2v}+\alpha_{20})}(c_2+m_{2c}). \qquad [2.11]$$

Partiendo de las fórmulas [2.11], el proceso de creación de los valores de los productos del sector I y del sector II se puede representar por medio de los diagramas de bloques de las figuras 28 y 29, respectivamente.

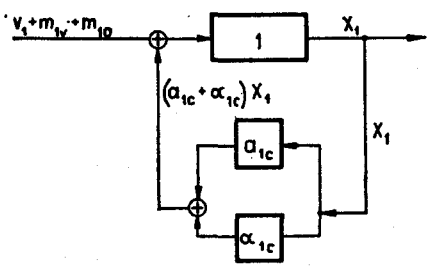


FIG. 28

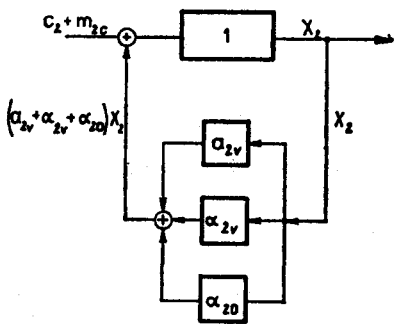


FIG. 29

Como se deduce de la figura 28, la suma $v_1+m_{1v}+m_{10}$ se transforma de manera idéntica en el producto del sector I. Una parte de este producto se halla retenida en la parte dada y como resultado de la primera fórmula [2.11], se efectúa la transformación que corresponde a la retroacción de dos sistemas de regulación de operadores proporcionales semejantes a_{1c} y α_{1c}, acoplados en paralelo.

De manera parecida se puede observar el funcionamiento del sistema de regulación presentado en la figura 29, en que aparecen, acoplados en paralelo, tres sistemas de regulación de los operadores correspondientes: a_{2v}, α_{2v}, α_{20}.

Mediante las fórmulas [2.11] se puede calcular la relación entre las magnitudes del producto global del sector I y el valor del producto global del sector II. Teniendo en cuenta la condición [2.10] de equilibrio del proceso de reproducción ampliada, y considerando que

$$1-(a_{2v}+\alpha_{2v}+\alpha_{20})=a_{2c}+\alpha_{2c},$$

obtenemos

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{a_{2c}+\alpha_{2c}}{1-(a_{1c}+\alpha_{1c})}. \qquad [2.11)$$

De donde

$$X_1=\frac{a_{2c}+\alpha_{2c}}{1-(a_{1c}+\alpha_{1c})}X_2. \qquad [2.12]$$

La transformación determinada por la fórmula [2.12] representa el diagrama de bloques de la figura 30. Observemos que en ese

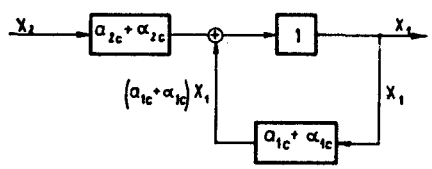


FIG. 30

diagrama el sistema regulado de operador $a_{2c}+\alpha_{2c}$ puede sustituirse por dos sistemas, acoplados en paralelo, de operadores iguales a_{2c} y α_{2c}, respectivamente. De manera análoga el regulador del opera-

dor $a_{1c}+\alpha_{1c}$, se puede sustituir por dos reguladores acoplados en paralelo de operadores iguales, a_{1c} y α_{1c}, respectivamente.

De igual forma no es difícil calcular que

$$X_2=\frac{a_{1v}+\alpha_{1v}+\alpha_{10}}{1-(a_{2v}+\alpha_{2v}+\alpha_{20})}X_1 \qquad [2.13]$$

y representar esta transformación sobre un diagrama de bloques adecuado. La interpretación económica de las fórmulas [2.12] y [2.13] y los diagramas de bloques que les corresponden, sería parecida a la interpretación de las fórmulas [2.7] y [2.8] del parágrafo anterior.

Observemos finalmente que las fórmulas [2.7] y [2.8], que corresponden a la reproducción simple, son un caso particular de las fórmulas [2.12] y [2.13], para la reproducción ampliada. Para verificarlo es suficiente hacer en las fórmulas [2.12] y [2.13] que los coeficientes de la acumulación sean iguales a cero.

Hemos demostrado de esta forma que los esquemas de la reproducción simple y de la reproducción ampliada pueden ser simplificados por medio de la fórmula fundamental de la teoría de la regulación. Esto no es de extrañar porque en dichos esquemas aparece la retroacción característica de los procesos de regulación. Por tanto, observamos que no sólo la teoría de Keynes, de considerar la renta nacional en el sentido de la suma de los pagos en la economía nacional, sino también los esquemas de la reproducción de Marx, pueden interpretarse y analizarse mediante la teoría general de la regulación.

§ 3. El esquema multisectorial de la reproducción

Nos ocuparemos del análisis cibernético del proceso de la reproducción en el caso de que la economía nacional esté dividida en n sectores. La tabla de gastos que corresponde a esta situación y los resultados de la producción, llamada también tabla de flujos entre sectores se representa a continuación:

X_1	$c_{11}\ c_{12}\ \dots\ c_{1n}$	Y_1
X_2	$c_{21}\ c_{22}\ \dots\ c_{2n}$	Y_2
...	.....	...
X_n	$c_{n1}\ c_{n2}\ \dots\ c_{nn}$	Y_n
V	$v_1\ v_2\ \dots\ v_n$	
M	$m_1\ m_2\ \dots\ m_n$	
	$X_1\ X_2\ \dots\ X_n$	

En esta tabla X_1, X_2, ... X_n, representan los valores de los productos globales en determinados sectores; $c_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$ los valores de los flujos intersectoriales de los medios de producción del sector i al sector j, Y_1, Y_2, ..., Y_n son los productos finales de los sectores determinados; $v_1, v_2, \dots v_n$ son los gastos de la fuerza de trabajo; $m_1, m_2, \dots m_n$ los valores del producto suplementario, creado en diferentes sectores de la economía nacional.

Mediante la tabla de los flujos intersectoriales se deduce fácilmente (sumando por filas la tabla) las siguientes *ecuaciones del balance de la división de los productos:*

$$X_i=c_{i1}+c_{i2}+\ \dots\ +c_{in}+Y_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \qquad [2.14]$$

y (sumando las columnas de la tabla) la *ecuación del balance de los gastos de la producción:*

$$X_i=c_{1i}+c_{2i}+\ \dots\ +c_{ni}+v_i+m_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \qquad [2.15]$$

Representando en esta última ecuación la suma

$$c_{1i}+c_{2i}+\dots+c_{ni} \text{ por } c_i,$$

obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$X_i=c_i+v_i+m_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \qquad [2.15a]$$

es decir, ecuaciones del mismo tipo que las que aparecen en el esquema de Marx.

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones [2.14] y [2.15], obtendremos las llamadas *ecuaciones del equilibrio de los flujos entre sectores,* que corresponden a las ecuaciones del equilibrio del proceso de la reproducción expuesto por Marx[4].

[4] El desarrollo detallado de la teoría de los flujos intersectoriales (esquemas múltiples de la reproducción) puede hallarse en los libros de O. Lange,

Introducimos para simplificar los llamados *coeficientes de los gastos de los medios de la producción,* determinados por las fórmulas

$a_{ij}=\frac{c_{ij}}{X_i}\ (i,j=1,2,\ldots,n)$ y entonces las ecuaciones de balance de los gastos de la producción pueden expresarse como sigue:

$$X_i=a_{1i}X_i+a_{2i}X_i+\ \ldots\ +a_{ni}X_i+v_i+m_i \qquad (i=1,2,\ldots,n). \qquad [2.16]$$

De aquí obtenemos:

$$X_i=\frac{1}{1-(a_{1i}+a_{2i}+\ \ldots\ +a_{ni})}(v_i+m_i) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \qquad [2.17]$$

Si la suma $a_{1i}+a_{2i}+\ \ldots\ +a_{ni}$ la representamos por a_i, entonces la fórmula [2.17] se transforma en la siguiente:

$$X_i=\frac{1}{1-a_i}(v_i+m_i) \qquad (i=1,2,\ldots,n), \qquad [2.18]$$

que tiene forma análoga a la fórmula [2.6], que corresponde a la

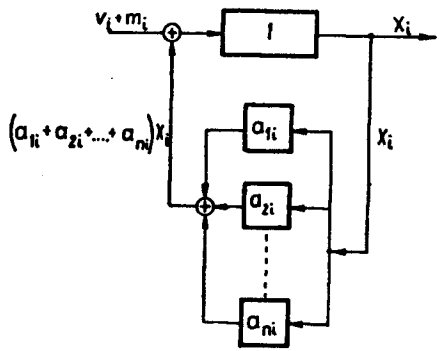


FIG. 31

transformcaión obtenida mediante el esquema de la reproducción simple de Marx.

Wstep do ekonometrii, 2.ª ed., PWN, Varsovia 1962, págs. 192 y sgs., o en *Teoria reprodukcji i akumulacji,* PWN, Varsovia 1961, págs. 62 y sgs.

Las transformaciones determinadas por las fórmulas [2.17] pueden presentarse en forma de diagrama de bloques según la figura 31. Mediante este diagrama de bloques utilizamos la tesis de la suma de operadores, que puede interpretarse como el acoplamiento en paralelo de los sistemas elementales (§ 6, cap. I).

Nos ocuparemos ahora de las ecuaciones de balance de la distribución de los productos, las que después de haber introducido los coeficientes de los gastos, adoptarán la siguiente forma

$$X_i=a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+\ \ldots\ +a_{ii}X_i+\ \ldots\ +a_{in}X_n+Y_i \qquad [2.19]$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

o

$$X_i(1-a_{ii})=\sum_{j\neq i}a_{ij}X_j+Y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

de donde

$$X_i=\frac{1}{1-a_{ii}}\left(\sum_{j\neq i}a_{ij}X_j+Y_i\right) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \qquad [2.20]$$

El diagrama de bloques que corresponde a las ecuaciones [2.20] aparece representado en la figura 32.

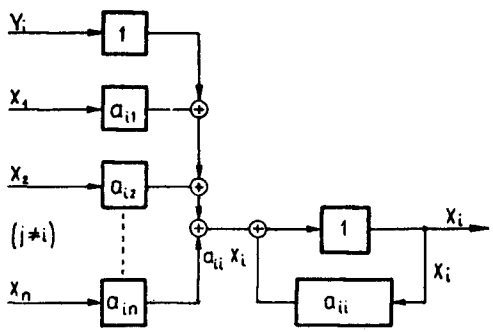


FIG. 32

§ 4. Forma matricial de las ecuaciones de balance de la distribución y de los gastos de producción

Trataremos ahora de presentar las ecuaciones de balance de la distribución de los productos [2.19] y las ecuaciones de balance

de los gastos de la producción [2.16] en forma de matriz. Utilizando los coeficientes de los gastos, la tabla de los flujos entre sectores puede expresarse de la manera siguiente:

X_1	$a_{11}X_1 \quad a_{12}X_2 \quad \dots \quad a_{1n}X_n$	Y_1
X_2	$a_{21}X_1 \quad a_{22}X_2 \quad \dots \quad a_{2n}X_n$	Y_2
...	.....	...
X_n	$a_{n1}X_1 \quad a_{n2}X_2 \quad \dots \quad a_{nn}X_n$	Y_n
V	$v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n$	
M	$m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n$	
	$X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n$	

Si se observa la tabla —o directamente las ecuaciones—, se puede fácilmente comprobar que el sistema de ecuaciones de balance de la distribución de los productos [2.19] puede expresarse en forma matricial:

$$x = Ax + y, \qquad [2.21]$$

donde A es la matriz de los coeficientes de los gastos de los medios de producción,

x es el vector de los productos globales,

y es el vector de los productos finales, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Resolviendo la ecuación matricial [2.21] obtenemos

$$x - Ax = y,$$

de donde

$$x = (I - A)^{-1} y,$$

lo que también puede expresarse en la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{I - A} y. \qquad [2.22]$$

La matriz unitaria se representa por I y la matriz

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

recibe el nombre de teoría de los flujos entre sectores; es decir, matriz de Leontieff.

La ecuación [2.22] corresponde a la fórmula fundamental de la teoría de la regulación y puede interpretarse como una ecuación conveniente de operadores en la que el vector y representa el estado de la entrada y el vector x el estado de la salida. La transformación consiste en este caso en multiplicar por la matriz (lo cual es una generalización de la transformación proporcional) y el símbolo de la matriz A puede también interpretarse como el operador de esta transformación. El esquema cibernético múltiple de la teoría de la producción, puede presentarse en la forma de la figura 33, con lo que el operador I significa la multiplicación por la matriz unitaria I, y el operador A la multiplicación por la matriz de los coeficientes de los gastos de los medios de la producción.

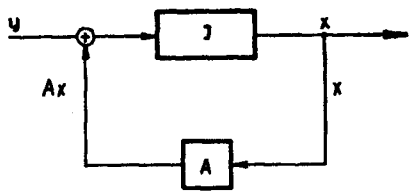


FIG. 33

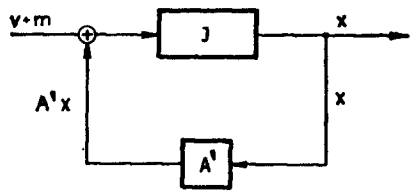


FIG. 34

Una interpretación cibernética análoga puede darse a las ecuaciones de balance de los gastos de la producción [2.16]. Su forma matricial es la siguiente:

$$x = A'x + (v + m), \qquad [2.23]$$

donde x, v y m son los vectores correspondientes y A' significa la matriz transpuesta de A.

Resolviendo la ecuación de la matriz [2.23] obtenemos

$$(I-A')\,x=v+m$$

de donde se deduce que

$$x=(I-A')^{-1}(v+m),$$

y se puede expresar en la forma siguiente:

$$x=\frac{1}{I-A'}(v+m)\,. \qquad [2.24]$$

La solución de las ecuaciones de los balances de los gastos de los medios de la producción es análoga a la solución de las ecuaciones de balance de la distribución de los productos. En la fórmula [2.24] la entrada es el gasto de trabajo humano presentado por el vector $v+m$, y en lugar de la matriz de Leontieff de la fórmula [2,24] aparece la matriz transpuesta, ya que, como puede fácilmente deducirse, $I-A'=(I-A')$. El diagrama cibernético de bloques que corresponde a la fórmula [2.24] aparece en la figura 34.

CAPÍTULO III

LA DINAMICA DE LOS PROCESOS DE REGULACION

§ 1. Interpretación dinámica del multiplicador keynesiano y del esquema de la reproducción

Iniciaremos la descripción de la dinámica de los procesos de regulación analizando nuevamente la fórmula de Keynes $Y=\frac{1}{1-c}A$, en la cual, como se sabe, Y significa la renta nacional considerada como la suma global de los pagos, c la propensión marginal al consumo y A el valor de las inversiones autónomas.

La fórmula usada por Keynes para aclarar el proceso de formación de los valores de los pagos globales de la economía nacional, ha sido utilizada primeramente por R. F. Kahn y J. M. Clark, quienes al ocuparse de la influencia que ejercen las obras públicas sobre la renta nacional, han obtenido esta fórmula de manera diferente a la empleada por Keynes [1]. Khan y Clark han razonado de la manera siguiente. Las inversiones autónomas realizadas en la economía nacional A, se transforman en la renta (la suma global de los pagos) Y. Así que el efecto inicial directo de las inversiones realizadas está dado por la ecuación $Y_0=A$. Suponiendo que el nivel de las inversiones se mantiene constantemente a la misma altura A y que el valor del consumo depende del valor de la renta obtenida en el período anterior, el valor de la renta en el período posterior será

$$Y_1=A+cY_0=A+cA=A(1+c)\,,$$

donde c es la propensión marginal al consumo.

[1] Véase R. F. Kahn, *The Relation of Home Investment to Unemployment*, "The Economic Journal" 1931, y J. M. Clark, *The Economics of Planning Publics Works*, Washington 1935.

A su vez, la cuantía de la renta en el período posterior es

$$Y_2 = A + cY_1 = A(1 + c + c^2) \text{ etc.}$$

Generalizando, en el período t la renta alcanza

$$Y_t = A + Ac + \ldots + Ac^t = A(1 + c + c^2 \ldots + c^t).$$

Si suponemos que el número de los períodos $t \longrightarrow \infty$ y tomando en cuenta que $0 < c < 1$, obtendremos en último término

$$Y = A\frac{1}{1-c}, \qquad [3.1]$$

o sea, la conocida fórmula de Keynes. Al multiplicador $\frac{1}{1-c}$ por razón de su origen, se le denomina frecuentemente *multiplicador dinámico.*

Del razonamiento de Kahn y Clark se deduce que tal acción, iniciada por las inversiones autónomas, ocasiona un proceso de aumento indefinido de la renta nacional. La suma de los efectos de este proceso, cuando $0 < c < 1$, tiende al valor limitado determinado por la fórmula [3.1].

En el § 4 del capítulo anterior hemos obtenido —expresada en forma matricial— la siguiente solución del sistema de las ecuaciones de las distribuciones de la producción, que corresponden al esquema multisectorial de la reproducción:

$$x = (\mathrm{I} - A)^{-1} y. \qquad [3.2]$$

En ciertas condiciones la matriz inversa $(Ix - A)^{-1}$ se puede presentar en forma de una serie infinita—llamada serie de Neumann—

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots. \qquad [3.3]$$

Entonces la solución del esquema multisectorial de la reproducción puede anotarse:

$$x = (I + A + A^2 + \ldots) y. \qquad [3.4]$$

La prueba de la fórmula [3.3] es la siguiente. Si multiplicamos los dos miembros de la ecuación de la matriz [3.3] por la matriz $(I - A)$ obtenemos

$$(I - A)(I - A)^{-1} = (I - A)(I + A + A^2 + \ldots)$$

es decir,

$$I = I + A + A^2 + \ldots - A - A^2 - A^3 - \ldots.$$

De donde, tras la reducción, tenemos $I = I$; luego [3.3] es verdadero.

Si la serie es limitada $I + A + A^2 \ldots + A^m$, entonces

$$I + A + A^2 + \ldots + A^m = \frac{I - A^{m+1}}{I - A} = (I - A)^{-1}(\mathrm{I} - A^{m-1}),$$

porque, como se sabe, en el cálculo de matrices se aplican (con excepción, por lo general, de la propiedad conmutativa del producto de matrices), reglas que son válidas en el álgebra de los números reales.

Si suponemos que la matriz de los coeficientes de los costes está elevada a la potencia $m+1$, es decir, que A^{m+1} tiende a ser una matriz nula cuando $m \longrightarrow \infty$, entonces la matriz $(I + A)^{-1}(I - A^m)$ es convergente a la matriz $(I - A)^{-1}$, cuando $m \longrightarrow \infty$ y el segundo miembro de la fórmula [3.3] tiene valor limitado.

De la suposición de que $A^{m+1} \longrightarrow 0$ resulta que también la matriz transpuesta[2] $(A')^{m+1} \longrightarrow 0$. Efectivamente, de la condición $A^{m+1} \longrightarrow 0$, cuando $m \longrightarrow \infty$, resulta que todos los elementos de esta matriz tienden a cero. Entonces también todos los elementos de la matriz $(A')^{m+1}$ tienden a cero y dicha matriz tiende a ser nula.

La fórmula [3.3] sirve para calcular en la práctica los valores de la matriz inversa de Leontieff. Se puede calcular por el método de las aproximaciones seguidas a base de un desarrollo [3.3], por ejemplo

$$(I - A)^{-1} \approx I + A + A^2 + A^3.$$

La fórmula [3.4] permite el cálculo de la solución de las ecuaciones de la distribución de la producción por el método de las aproximaciones seguidas (iteración), y hace posible también cierta interpretación económica de estas ecuaciones. En efecto, la solución $x = (I - A)^{-1} y$ de las ecuaciones de distribución de los produc-

[2] El símbolo 0 siempre significa aquí una matriz nula; es decir, la matriz compuesta de ceros solamente.

tos, presentada en esta forma:

$$x = y + Ay + A^2y + \ldots \qquad [3.5]$$

puede interpretarse de la manera siguiente.

El producto global primitivo x es igual al producto final; es decir, $x=y$ significa la primera aproximación a la solución de [3.5]. Sin embargo, para producir el producto global en cantidad y, son necesarios los medios de producción en cantidad Ay. Esto, a su vez, requiere la producción de los medios de producción en cantidad $A(Ay)=A^2y$, etc.

Así hemos obtenido una interpretación económica del proceso de formación del producto global que tiene lugar en la economía nacional. Con una interpretación similar nos encontramos también en la literatura que se ocupa del análisis de los costes y los resultados de la producción.

La solución de [3.5] se puede interpretar también por medio del esquema cibernético presentado en la figura 35. Tras el primer

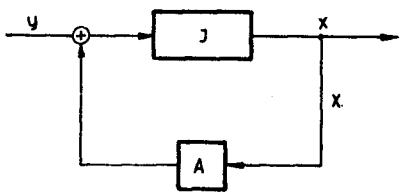


FIG. 35

paso del valor y por la retroacción, al valor primitivo y se agrega el valor Ay que, a su vez, pasando de nuevo por la retroacción, aumentará hasta el valor $A(Ay)=A^2y$, etc.

La retroacción se inicia con la acción de un proceso objetivo infinito que conduce a un límite determinado si la matriz A posee la propiedad de que $A^m \longrightarrow 0$, donde $m \longrightarrow \infty$, es decir, cuando los aumentos consecutivos del producto final Ay, A^2y, A^3y, ... empiezan a ser cada vez más pequeños, hasta que al final se anulan. Entonces hay que investigar cuándo se da esta propiedad y cuándo la serie infinita [3.3] es concurrente y la solución de las ecuaciones de la distribución de los productos puede ser presentada en la fórmula [3.4].

§ 2. La condición de convergencia de la matriz A^m

Para analizar las condiciones de convergencia de la matriz A^m, sobre la cual se ha hablado en el parágrafo anterior, nos apoyaremos sobre la siguiente tesis del álgebra lineal.

La matriz A^m se aproxima a la matriz nula cuando $m \longrightarrow \infty$, si todas las raíces características de la matriz poseen un valor absoluto menor de 1. Recordaremos que a las raíces características de la matriz A las denominamos números λ que para $x \neq 0$ cumplen la ecuación vectorial

$$Ax = \lambda x . \qquad [3.6]$$

Esta ecuación se puede expresar de la siguiente forma:

$$(A - \lambda I)\, x = 0 . \qquad [3.7]$$

La ecuación vectorial [3.6] ó [3.7] es un sistema de ecuaciones homogéneas lineales y tiene algunas soluciónes distintas de 0, si el dominador característico de la matriz de los coeficientes de este sistema es igual a cero, es decir, cuando

$$|A - \lambda I| = 0 . \qquad [3.8]$$

Esta es la ecuación característica de la matriz A ; los números λ que la cumplen son raíces características de la matriz.

Multiplicando el primer miembro de la ecuación [3.6] por la matriz A, obtendremos

$$A^2 x = \lambda\, Ax , \quad \text{y de ahí} \quad A^2 x = \lambda(\lambda x) ;$$

de donde

$$A^2 x = \lambda^2 x .$$

La última ecuación está cumplida cuando el denominador

$$|A^2 - \lambda^2 I| = 0 . \qquad [3.9]$$

Operando de manera semejante, hallamos a continuación que la ecuación característica de la matriz A^m posee la forma $A^m x = \lambda^m x$ y está cumplida cuando el denominador

$$|A^m - \lambda^m I| = 0 . \qquad [3.10]$$

De la ecuación [3.10] resulta que las raíces características de la matriz A^m son la potencia de grado m de las raíces características de la matriz A. De la ecuación $A^m x = \lambda^m x$, con el vector $x \neq 0$ resulta que A^m se aproxima a cero cuando λ se aproxima a cero y viceversa, λ se aproxima a cero cuando A^m se aproxima a cero. La condición, necesaria y suficiente para que $A^m \longrightarrow 0$, cuando $m \longrightarrow \infty$, es que $\lambda^m \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Esto se verifica sólo y cuando $|\lambda_i| < 1$.

De ahí resulta que la condición necesaria y suficiente de la convergencia de la serie $I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ es que todas las raíces características de la matriz A^m posean un valor absoluto menor de 1.

Puesto que las raíces características de la matriz A y de la matriz transpuesta A' son las mismas, la condición arriba mencionada determina asimismo la convergencia de la serie $I + A' + (A')^2 + (A')^3 + \ldots$.

Aclararemos ahora cuál es el sentido económico de la condición $|\lambda_i| < 1$. A partir de la ecuación [3.6] señalamos que $A^m x = \lambda A^{m-1} x$. Entonces la solución [3.5] se puede expresar de la siguiente forma:

$$x = y + (1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots) Ay .$$

Si $|\lambda| < 1$, entonces los valores absolutos de los aumentos paulatinos del producto global disminuyen en relación $|\lambda|$. Los valores absolutos de las raíces características λ_i son entonces los *coeficientes de debilitamiento* de aumentos consecutivos del producto global, que tienen lugar con motivo de la retroacción.

§ 3. La interpretación dinámica de la fórmula fundamental de la teoría de la regulación

Las consideraciones hechas en los parágrafos anteriores pueden aprovecharse para obtener una interpretación dinámica de la fórmula fundamental de regulación: $y = \dfrac{S}{1 - SR} x$. Se nos presenta, por consiguiente, la posibilidad de estimar por analogía que el operador de la retroacción $\dfrac{1}{1 - SR}$, que expresa la función del regulador,

se puede considerar como la suma de una progresión geométrica infinita.

$$\frac{1}{1 - SR} = 1 + SR + (SR)^2 + (SR)^3 + \ldots , \qquad [3.11]$$

con lo que dicha fórmula tiene sentido (es decir, la progresión arriba presentada es convergente) cuando "el valor absoluto" SR es menor que 1, es decir, cuando $|SR| < 1$.

El significado del símbolo SR no ha sido aún considerado de manera general. Sabemos, sin embargo, cuál es su sentido en casos particulares. Si, por ejemplo, el sistema regulado y el regulador realizan la transformación proporcional, por lo que a S y R les corresponden números reales por los cuales se multiplica el estado de la entrada, entonces $|SR|$ tiene un significado determinado porque indica la multiplicación por un valor absoluto del producto de dos números reales. Se puede también determinar el símbolo $|SR|$, cuando los operadores S y R significan la multiplicación por un número asociado, dado que en matemáticas hay una noción determinada del valor absoluto (módulo) del número asociado, de la cual podemos servirnos aquí.

En el caso general no tiene sentido hablar del valor absoluto de los operadores, puesto que el símbolo del operador T, que determina la transformación del estado de la entrada x al estado de la salida y, es decir, $y = Tx$, es una regla de procedimiento a la cual no corresponde necesariamente un número determinado. Es imprescindible cierta interpretación general del "valor absoluto" del operador, del cual nos vamos a ocupar ahora.

La transformación $y = Tx$ puede expresarse simbólicamente en la forma $T = \dfrac{y}{x}$.

Esta expresión indica que a cada operador se le puede subordinar una relación $\dfrac{y}{x}$, es decir, la razón de transformación del sistema. Esta es la relación de dos números o vectores, puesto que el valor absoluto (módulo) del vector, es un número real; luego siempre se puede hablar del valor absoluto de la razón de transformación del sistema $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \left|\dfrac{y}{x}\right|$. Así, pues, de la expresión $T = \dfrac{y}{x}$ se obtiene

la determinación del valor absoluto del operador como el valor absoluto de su razón de transformación.

El valor absoluto así determinado es siempre una variable, puesto que el estado de la entrada x y el estado de la salida y, son por definición variables, por ejemplo, son funciones de tiempo $x(t)$ e $y(t)$, o dependen de otras variables. Para obtener de una manera definitiva un valor constante determinado, subordinado al operador T, tomamos el límite superior de los valores absolutos $\frac{y}{x}$. Para los operadores lineales continuos este límite superior siempre existe[3]. Finalmente, vamos a definir el valor absoluto del operador, llamado también su *norma*, como

$$\| T \| = \text{lím sup} \left| \frac{y}{x} \right| . \qquad [3.12]$$

De esta manera, a cada operador se halla subordinado un valor que significa su valor absoluto[4].

Resulta entonces que $(SR)^m \longrightarrow 0$, cuando $m \longrightarrow \infty$, si $|SR| < 1$, es decir, cuando el correspondiente límite superior de la razón de transformación es menor que uno. Entonces, de acuerdo con los resultados obtenidos en el parágrafo 2, la suma de la progresión infinita $1+(SR)+(SR)^2+(SR)^3+\ldots \frac{1}{1-SR}$ e $y=[1+(SR)+(SR)^2+\ldots]$ $Sx=\frac{S}{1-SR}x$. Como se ve, la acción del regulador produce aumentos continuos (positivos o negativos) del valor del estado de la salida y del sistema de regulación. Por el momento este estado es Sx, luego aumenta por el valor $(SR)x$, más tarde por el valor $(SR)^2Sx$, etc. Esto ocurre a causa de las continuas reacciones del estado de la salida del sistema regulado sobre su estado de entrada por medio de la retroacción del regulador. Si $|SR| < 1$, entonces estos aumentos son cada vez menores y su suma convergente.

La condición de la convergencia de la progresión que aparece

[3] Véase, p. ej., B. Z. Wulich, *Vviedienie v funkcionalnei analiz*, Moscú 1958, pág. 198.

[4] Al límite superior de un conjunto de números reales, le designamos mediante un número real g, tal que: 1) cada número del conjunto dado no es mayor que g; 2) cada número menor que g es menor, por lo menos, que un número del conjunto dado.

en el segundo miembro de la ecuación [3.11] se puede determinar también por medio de las raíces características del operador SR. De manera parecida a lo hecho con las matrices, determinamos las raíces características del operador T como los valores numéricos del parámetro λ, con los cuales existe la solución no nula de la ecuación

$$Tx=\lambda x , \qquad [3.13]$$

donde el valor x es un número vector o función. Esta ecuación se puede expresar también en la siguiente forma:

$$(T-I\lambda)\,x=0 . \qquad [3.13a]$$

La condición de la existencia de una solución no nula de esta ecuación es

$$T-\lambda I=0 , \qquad [3.14]$$

es decir, que el operador $T-\lambda I$ es un operador nulo. Esta es la ecuación característica del operador T. Los valores del parámetro, que cumplen la ecuación característica, son las raíces características del operador T.

De manera semejante, como en el caso de la matriz, encontramos, mediante las sustituciones reiteradas en la ecuación [3.13], que $T^m x=\lambda^m x$. Entonces, si $x \neq 0$, T^m tiende a cero con el exponente m, solamente y cuando $\lambda^m \longrightarrow 0$. Esto sucede cuando $|\lambda| < 1$ para todos los valores posibles de las raíces características[5]. Entonces la serie $I+T+T^2+\ldots$ es convergente y su suma tiene el valor $\frac{1}{-I-T}$, es decir, $(I-T)^{-1}$.

[5] En el caso de la matriz, la cantidad de las raíces características es limitada (o ilimitada cuando la matriz es infinita); en el caso general del operador lineal, el conjunto de las raíces características puede ser infinito y no calculable. Por ejemplo, los valores que cumplen la ecuación característica pueden ser una función continua de cierta variable s. En ese caso las raíces características forman un espectro continuo de los valores de la función $\lambda(s)$. Por ejemplo, si el valor x es una función diferenciable $x(s)$ de la variable s, que posee el primer diferencial continuo $x'(s)$; el operador T es un operador de la diferenciación D. Entonces, en vez de la ecuación [3.13] tenemos $Dx(s)=\lambda x(s)$, es decir, $x'(s)=\lambda x(s)$; luego $\lambda=\frac{x'(s)}{x(s)}$ es la función de la variable s.

Con ayuda de las raíces características λ el operador de la retroacción [3.11] puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{1-SR}=1+(1+\lambda+\lambda^2+\ldots)SR$$

y la fórmula fundamental de la teoría de la regulación

$$Y=Sx+[(1+\lambda+\lambda^2+\ldots)SR]Sx. \qquad [3.15]$$

Si $|\lambda|<1$, entonces $|\lambda|$ es un coeficiente de debilitamiento de las variaciones reiteradas de la salida del sistema de regulación que tienen lugar por la acción del regulador.

De esta manera llegaremos a la conclusión de que los sistemas de la regulación se pueden analizar dinámicamente, como procesos infinitos de reacciones constantes que son cada vez más débiles y cuya suma produce un efecto determinado. Sin embargo, para representar totalmente la dinámica del proceso, hay que mostrar de qué manera se verifica el proceso en el tiempo. Hasta ahora, cuando las fórmulas correspondientes servían exclusivamente para calcular el resultado final de determinados estadios del proceso, el tiempo no necesitaba ser considerado explícitamente. Sin embargo, hay que hacerlo cuando se quiere realizar el curso del proceso de regulación en el tiempo.

§ 4. Un ejemplo del curso del proceso de regulación en el tiempo

Aclararemos ahora, sobre un ejemplo, de qué manera se puede obtener un cuadro completo de la dinámica del proceso de regulación. Con este fin nos ocuparemos una vez más del análisis de la dinámica de la acción del multiplicador keynesiano. Dividamos el tiempo en que ocurre el proceso, de aumento del ingreso nacional, en períodos limitados 0,1,2,... . El ingreso nacional y los gastos para el consumo en los períodos determinados, adecuadamente indicados por Y_0, Y_1, Y_2... y C_0, C_1, C_2,... . Si suponemos —como hemos hecho anteriormente— que el nivel de las inversiones autónomas A y la propensión marginal al consumo c no están sometidos a cambios y los gastos para los fines del consumo son función del ingreso del año anterior, obtenemos entonces el siguiente sistema de

ecuaciones recurrentes que determinan el valor del ingreso nacional en el sentido de la suma global de los pagos en los períodos determinados:

$$\begin{aligned} Y_0&=A\\ Y_1&=A+cY_0\\ Y_2&=A+cY_1\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Generalizando, tenemos la ecuación diferencial

$$Y_t=A+cY_{t-1}, \qquad [3.16]$$

donde t adopta los valores enteros 0,1,2,... .

La última ecuación se puede expresar de la forma siguiente:

$$Y_t=A+C_t, \quad \text{donde} \quad C_t=cY_{t-1}. \qquad [3.17]$$

Aplicando en las ecuaciones arriba mencionadas "sustituciones seguidas", obtenemos:

$$\begin{aligned} Y_2&=A+cY_1=A+Ac+Ac^2\\ Y_3&=A+cY_2=A+Ac+Ac^2+Ac^3 \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

y generalizando:

$$Y_t=A+Ac+Ac^2+\ldots+Ac^t=A(1+c+c^2+\ldots+c^t).$$

Si $t\longrightarrow\infty$, entonces $Y_t\longrightarrow A\,\frac{1}{1-c}$ (porque $0<c<1$), donde $\frac{1}{1-c}$ se denomina multiplicador dinámico keynesiano. De esta manera hemos demostrado, una vez más, que la dinámica del proceso de formación del ingreso nacional tiende al valor limitado.

Presentaremos ahora otra solución al problema de la dinámica del proceso de formación del ingreso nacional. Con este fin supongamos desde el principio que existe cierto estado de equilibrio de este proceso, es decir, un nivel del ingreso tal que —una vez alcanzado—, no está sometido a cambio alguno. En el estado de equilibrio se cumple la siguiente ecuación

$$Y_t=cY_t-A,$$

cuya solución es

$$\hat{Y}_t=\frac{1}{1-c}A$$

Consideremos ahora la desviación Y_t del estado de equilibrio $\hat{Y}_t$. Señalando la desviación por $\bar{Y}_t$, tenemos

$$\bar{Y}_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \frac{1}{1-c}A\,. \qquad [3.18]$$

De donde resulta

$$\bar{Y}_t = Y_t - \frac{A}{1-c} = A + cY_{t-1} - \frac{A}{1-c} = c\left(Y_{t-1} - \frac{A}{1-c}\right) = c\bar{Y}_{t-1}\,,$$

puesto que $Y_{t-1} - \dfrac{\Delta}{1-c}$ es la desviación Y_{t-1} del estado de equilibrio $\hat{Y}_t = \dfrac{A}{1-c}$.

De esta manera obtenemos la llamada ecuación diferencial reducida:

$$\bar{Y}_t = c\bar{Y}_{t-1}\,, \qquad [3.19]$$

que consiste en la simplificación de la ecuación diferencial anterior [3.16], puesto que en la ecuación [3.19] la constante A ya no existe. La ecuación diferencial reducida es homogénea, lo que facilita su solución.

La ecuación [3.19] se puede solucionar directamente por el método de los cálculos seguidos de los valores variables Y_1, $Y_2 \ldots$, es decir, por el método recurrente.

Tenemos

$$\bar{Y}_1 = c\bar{Y}_0\,,$$
$$\bar{Y}_2 = c\bar{Y}_1 = c^2\,\bar{Y}_0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Y generalizando

$$\bar{Y}_t = c^t\,\bar{Y}_0\,. \qquad [3.20]$$

Analicemos la solución obtenida en la cual $\bar{Y}_0$ significa la desviación principal del estado de equilibrio. Si al comienzo del proceso que nos ocupa, el sistema se encuentra en estado de equilibrio, es decir, $\bar{Y}_0 = 0$, permanecería constantemente en estado de equilibrio puesto que entonces $\bar{Y}_t = 0$ para cada t.

Supongamos que en la economía nacional hay ciertas perturbaciones que ocasionan alteraciones en el estado de equilibrio del ingreso nacional (de los pagos globales), entonces, $\bar{Y}_0 \neq 0$.

Como sabemos, $\bar{Y}_t = c^t Y_0$ y

$$\lim_{t\to\infty} \bar{Y}_t = \bar{Y}_0 \lim_{t\to\infty} c^t \qquad [3.21]$$

Si

$$|c| < 1\,, \quad \text{entonces} \quad Y_t \longrightarrow 0\,,$$

lo que significa que la perturbación en el estado de equilibrio del sistema sólo se anula con el tiempo. De este tipo de sistemas decimos que son *estables*. En cambio, cuando $|c| > 1$, entonces $\bar{Y}_t \longrightarrow \infty$, cuanto $t \longrightarrow \infty$. Lo que significa que la perturbación ocurrida en el sistema, aumenta constantemente haciéndose acumulativa. A un sistema de este tipo le denominamos *inestable*.

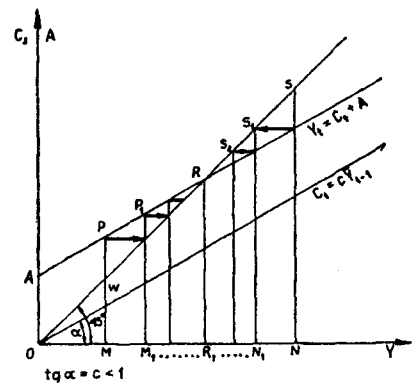


FIG. 36

En el caso considerado por nosotros tenemos $0 < c < 1$; entonces el sistema es estable.

El proceso dinámico que se verifica en el sistema determinado por la ecuación [3.18] se puede representar también gráficamente. En la figura 36 se halla representado el proceso dinámico mencionado en el caso de que $0 < c < 1$. En el sistema de coordenadas rectangulares, sobre el eje de las abscisas se mide el valor del

ingreso nacional Y, y sobre el eje de las ordenadas, el valor del consumo y las inversiones autónomas. La gráfica de la función del consumo $C_t = cY_{t-1}$ es una recta que pasa por el centro del sistema de las coordenadas y está inclinada con respecto a la dirección positiva del eje de las abscisas, con un ángulo menor de 45° (puesto que $0 < c < 1$). La fracción OA representa el valor de las inversiones autónomas. De ello resulta que el ingreso nacional inicial $Y_0 = OM$, el valor del consumo $C_1 = cY_0$ está determinado por la ordenada NW, el ingreso nacional $Y_1 = C_1 + A$ por la ordenada $MP = cY_0 + A$ (la recta AP es paralela a la recta OW). Cortando —por medio de la recta OR, que pasa por el centro del sistema de coordenadas con una inclinación de 45° respecto al eje de las abscisas— el segmento OM_1 igual MP (es decir, el valor del ingreso el primer año Y_1) determinamos el valor del ingreso en el segundo año $Y_2 = C_2 + A = cY_1 + A$. Este valor es igual al segmento M_1P_1. Repitiendo esta operación veremos que nos acercamos cada vez más por el lado izquierdo al punto de equilibrio R, al cual corresponde el ingreso en el estadio de equilibrio $\hat{Y} = R_1R = 0R_1$.

De manera parecida se puede analizar el caso cuando el valor inicial de la renta Y_0 es mayor al de la renta en el estado de equilibrio $\hat{Y}$. Cuando $t \longrightarrow \infty$ el valor del ingreso Y tenderá también al valor $\hat{Y}$, del segundo miembro.

De ello resulta que el sistema considerado es estable, puesto que cada alteración del estado de equilibrio, es decir, cada perturbación, se anula automáticamente y el proceso tiende al equilibrio.

Se nos presenta una situación diferente cuando el coeficiente de consumo $c > 1$, es decir, la recta de la ecuación $C = cY_{t-1}$ forma con la dirección positiva del eje x un ángulo mayor de 45°. Como se puede apreciar en la figura 37, el sistema no es estable en este caso, puesto que la alteración que se da en él (perturbación) no solamente no se anula de manera automática, sino que, por el contrario, aumenta cada vez más.

En el caso de que el coeficiente del consumo sea $c = 1$, la recta con la ecuación $C_t = cY_{t-1}$, es decir, $C_t = Y_{t-1}$, forma con la dirección positiva del eje x, un ángulo de 45°, así que coincide con la recta auxiliar $0R$ (Figs. 36 y 37). Entonces, como se puede comprobar fácilmente sobre la figura correspondiente, el sistema se halla siempre en equilibrio. Cada estado corresponde al de equilibrio y no se encuentra sometido a alteraciones, puesto que tenemos $Y_t = Y_{t-1}$, de donde $Y_0 = Y_1 = Y_2 = \ldots$.

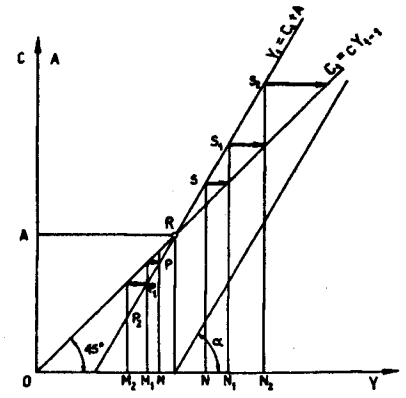


FIG. 37

§ 5. La dinámica del proceso marxista de reproducción

Como un segundo ejemplo de análisis del proceso dinámico estudiaremos de manera parecida el desarrollo de la economía, según el esquema presentado por Marx. Partimos de la ecuación que corresponde a este proceso y que aparece en el esquema de la reproducción de Marx (§ 1, capítulo II):

$$x = a_c x + (v + m), \qquad [3.22]$$

donde a_c es un coeficiente de los gastos de los medios de producción. Esta ecuación podemos también expresarla de la manera siguiente:

$$x = \frac{1}{1 - a_c}(v + m). \qquad [3.22a]$$

Las magnitudes x, v y m, se hallan expresadas en unidades de valor o precio.

Estudiando la dinámica del proceso de reproducción tenemos que introducir en la ecuación analizada [3.22] el factor tiempo, es decir, "fechar" las magnitudes correspondientes. Con este fin intro-

ducimos el índice t que significa el período correspondiente que para simplificar llamaremos un año. Suponemos que los gastos de los medios de producción de un año dado, $a_c x_{t-1}$ son proporcionales a la producción del año anterior. Entonces la ecuación toma la siguiente forma:

$$x_t = a_c x_{t-1} + (v_t + m_t) . \qquad [3.23]$$

lo que significa que la producción del año $t-1$ determina la cantidad de los medios de producción gastados en ese año. En otras palabras: la cantidad de los medios de producción utilizados en el año dado (es decir, el valor de los medios de producción traspasado al producto) es una fracción fija de la producción del año anterior $(0 < a_c < 1)$.

Solucionamos la ecuación diferencial [3.23] —como siempre— por el método de recurrencia. Si para simplificar consideramos que el gasto del trabajo de cada año $v_t + m_t$ es constante y alcanza un valor igual al alcanzado en el año inicial, es decir, $v_0 + m_0$ y que en el año inicial no existían los medios de producción, obtenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones que expresan el valor de la producción en los años siguientes:

$$x_0 = v_0 + m_0 ,$$
$$x_1 = a_c x_0 + (v_0 + m_0) = (v_0 + m_0) \cdot (1 + a_c) ,$$
$$x_2 = a_c x_1 + (v_0 + m_0) = (v_0 + m_0) \cdot (1 + a_c + a_c^2) ,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Generalizando:

$$x_t = a_c x_{t-1} + (v_0 + m_0) = (v_0 + m_0) \cdot (1 + a_c + a_c^2 + \ldots + a_c^t) . \qquad [3.24]$$

De la solución general [3.24] se deduce que el proceso investigado tiende al equilibrio, si $|a| < 1$, lo que sucede en nuestro caso, puesto que $0 < a_c < 1$. Entonces

$$\lim_{t \to \infty} x_t = (v_0 + m_0) \cdot \frac{1}{1 - a_c} . \qquad [3.25]$$

De esta manera obtenemos la idea del curso temporal del proceso marxista de la reproducción. El operador de la retroacción que

aparece en la fórmula [3.25] $\frac{1}{1 - a_c}$ es una relación entre el valor del producto y el gasto de trabajo. Puesto que $0 < a_c < 1$, entonces $\frac{1}{1 - a_c} > 1$. Dicho operador es entonces un amplificador, que expresa el aumento del valor del producto (en relación con el gasto de trabajo), a causa del desgaste de los medios de producción.

Observemos que —de manera parecida a lo sucedido en el primer ejemplo— el análisis de la dinámica de este proceso se puede simplificar. Con este fin supongamos que existe un valor de producción tal $\hat{x}_t = \frac{v_0 + m_0}{1 - a_c}$, que corresponde al estado de equilibrio del sistema y analicemos la alteración del estado de equilibrio.

$$\bar{x}_t = x_t - \hat{x}_t = x_t - \frac{v_0 + m_0}{1 - a_c} . \qquad [3.26]$$

Después de simplificar transformaciones, de modo análogo a como lo hicimos en los casos anteriores, obtenemos la siguiente ecuación diferencial en forma reducida (homogénea)

$$\bar{x}_t = a_c \bar{x}_{t-1} . \qquad [3.27]$$

La solución de esta ecuación es

$$\bar{x}_t = a_c^t \bar{x}_0 . \qquad [3.28]$$

De la solución [3.28] se deduce que las alteraciones aparecidas en el estado de equilibrio se anulan por sí mismas; es decir, el proceso es estable, puesto que $0 < a_c < 1$. El proceso marxista de reproducción puede ser ilustrado gráficamente de manera parecida a como se ha hecho con el proceso de formación de la renta nacional, en función del multiplicador keynesiano.

La suposición arriba adoptada de que el trabajo humano $v_0 + m_0$ es constante, no es necesaria. Se puede demostrar —aunque fuera por el método gráfico— que los principales resultados de nuestras consideraciones no variarán aunque el gasto del trabajo humano cambie de año en año. Sobre la correspondiente gráfica la línea que representa la producción $x_t = a_c x_{t-1} + (v_t + m_t)$ no será entonces

paralela a la recta de los gastos de los medios de producción $a_c x_{t-1}$; a pesar de que $0 < a_c < 1$, el proceso tenderá hacia el equilibrio como está demostrado en la figura 38. La línea que corresponde a la producción en el año t no tiene que ser una línea recta, basta con que esa línea corte a la recta que pasa por el principio del sistema de coordenadas y que está inclinada en la dirección positiva del eje x, con un ángulo de 45°.

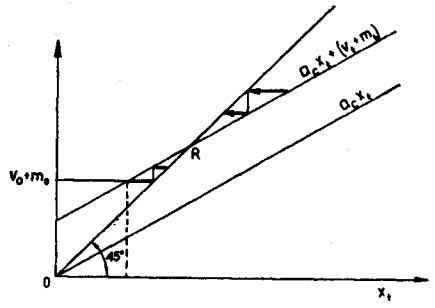


FIG. 38

§ 6. Los esquemas de bloques de los procesos dinámicos

Ahora daremos los esquemas de bloques correspondientes a los procesos dinámicos examinados en los §§ 4 y 5: el proceso de la operación del multiplicador keynesiano y el proceso marxista de reproducción.

Como sabemos, la dinámica de la operación del multiplicador keynesiano se representa por medio de la ecuación diferencial

$$Y_t = cY_{t-1} + A$$

o de manera más simple, por medio de la ecuación diferencial reducida (homogénea)

$$\overline{Y}_t = c\overline{Y}_{t-1},$$

donde $Y_t = Y_t - \dfrac{A}{1-c}$ que constituye la magnitud de la alteración del estado de equilibrio (perturbación).

La solución de esta ecuación diferencial reducida tiene la siguiente forma:

$$\overline{Y}_t = c^t \overline{Y}_0,$$

En la que resulta evidente que el sistema es estable cuando $0 < c < 1$.

La representación estática del multiplicador keynesiano por medio de los esquemas de bloques se ha expuesto en la figura 39. Las inversiones autónomas A, en un sistema dado, se transforman en el ingreso Y_t, que a través del consumo, por medio de la retroacción, vuelve a actuar sobre el sistema regulado.

En un enfoque dinámico de la función del multiplicador keynesiano sobre la entrada del sistema regulado, no influye el ingreso de un año dado Y_t, sino el ingreso del año anterior Y_{t-1}. De esto resulta que en el esquema de bloques tenemos que incluir un operador suplementario que consiste en retrotraer el valor del ingreso por un año. Señalamos este operador con el símbolo E^{-1}.

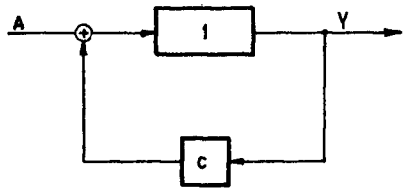


FIG. 39

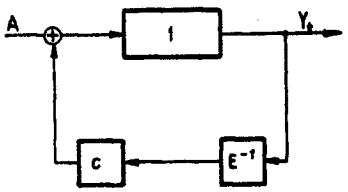


FIG. 40

Por medio de este operador la ecuación diferencial $Y_t = cY_{t-1} + A$ se puede expresar de la manera siguiente

$$Y_t = cE^{-1} Y_t + A.$$

De donde

$$(1 - cE^{-1}) Y_t = A,$$

es decir

$$Y_t = \frac{1}{1 - cE^{-1}} A. \qquad [3.29]$$

De la forma de la ecuación [3.29] resulta que el esquema de bloques que corresponde al modelo dinámico keynesiano se puede presentar como se ve en la figura 40.

A la ecuación [3.29] se le puede dar otra forma equivalente. La ecuación $Y_t = cY_{t-1} + A$ es equivalente a la ecuación $Y_{t+1} = cY_{t-1} + A$:

aprovechando el operador E (adelantamiento) se puede formular al final

$$EY_t = cY_t + A\,,$$

de donde

$$Y_t = \frac{1}{E-c}A\,. \qquad [3.30]$$

La equivalencia de las fórmulas [3.29] y [3.30] se puede demostrar también por métodos algebraicos. Multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación [3.29] por E, obtenemos [6]:

$$\frac{EA}{E-EE^{-1}c} = \frac{A}{E-c}\,,$$

es decir, el segundo miembro de su ecuación [3.30].

La dinámica del proceso marxista de reproducción está presentada por la ecuación diferencial heterogénea [3.23]

$$x_t = a_c\, x_{t-1} + (v_t + m_t)$$

o por la ecuación reducida (homogénea) diferencial [3.27]

$$\bar{x}_t = a_c\, \bar{x}_{t-1}\,,$$

cuya solución tiene la siguiente fórmula [3.28]

$$\bar{x}_t = a_c^t\, \bar{x}_0\,.$$

Como sabemos $0 < a_c < 1$.

La ecuación $x_t = a_c x_{t-1} + (v_t + m_t)$ introduciendo el operador E^{-1} se puede formular de la manera siguiente:

$$x_t = a_c\, E^{-1}\, x_t + (v_t + m_t)\,.$$

De donde

$$x_t = \frac{1}{1 - a_c\, E^{-1}}(v_t + m_t)\,. \qquad [3.31]$$

[6] $EA = A$, puesto que A es una magnitud constante independiente de t.

El esquema de bloques de este proceso dinámico se ha representado en la figura 41.

También las ecuaciones diferenciales reducidas se pueden representar en los esquemas de bloques. La ecuación $\bar{Y}_t = c\bar{Y}_{t-1}$ indica que en el sistema se verifica la multiplicación del valor de la entrada $\bar{Y}_{t-1}$ por el número c, es decir la transformación proporcional.

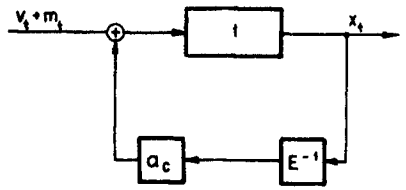


FIG. 41

El esquema de bloques correspondiente es el de la figura 42. En dicho esquema la retroacción ya no aparece; está sustituida por un adecuado acoplamiento en serie.

El proceso dinámico expresado por ecuación $\bar{Y}_t = c\bar{Y}_{t-1}$, cuya solución es $\bar{Y}_t = c^t\bar{Y}_0$, puede también considerarse como el acoplamiento en serie formado por una infinita cantidad de sistemas, aunque susceptible de ser contadas, por el que en cada uno de éstos sostemas se da la transformación proporcional consistente en la multiplicación del valor de la entrada por c (Fig. 43). Puesto que $0 < c < 1$, en dicha transformación es el debilitamiento lo que produce la estabilidad del sistema.

FIG. 42

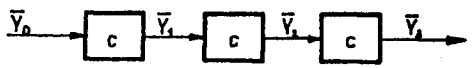


FIG. 43

De manera análoga se puede representar mediante esquemas de bloques la dinámica del proceso marxista de reproducción, de acuerdo con la ecuación diferencial reducida $\bar{x}_t = a_c\bar{x}_{t-1}$, como puede verse en las figuras 44 y 45.

En los esquemas de bloque, la retroacción puede sustituirse por el acoplamiento en serie correspondiente. Llamaremos a esta opera-

ción *reducción de la retroacción.* Este es precisamente el sentido que tiene el uso de la ecuación diferencial reducida. Como muestran las fórmulas [3.18] y [3.25], el operador de la retroacción, que determina el estado de equilibrio, se elimina al sustituir los valores primitivos por sus desviaciones del estado de equilibrio. A causa de

FIG. 44

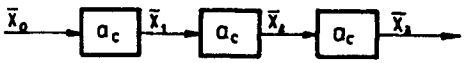


FIG. 45

ello el operador de la retroacción no aparece en la ecuación diferencial reducida y en su lugar se introduce el acoplamiento en serie que determina esta ecuación.

§ 7. La dinámica de la formación del precio de mercado

Pondremos un ejemplo más del proceso dinámico, a saber, el curso de la formación del precio en el mercado de libre competencia.

Supongamos que se nos da la función de la demanda $x_t = ap_t + \alpha$ y la función de la oferta $y_t = bp_{t-1} + \beta$ de un determinado producto. En estas fórmulas, x_t indica el valor de la demanda de un producto dado, y_t, el valor de la oferta del mismo producto (x_t e y_t están medidos en unidades naturales, por ejemplo kilogramos, metros, litros, etcétera) en el período t; p_t y p_{t-1} indican el precio en el período t y en el período anteerior $t-1$. Tenemos que $a<0, \alpha>0, b<0$ y $\beta>0$; el valor de estos parámetros está fijado por métodos econométricos. Observemos que el valor de la oferta en un período dado t es una función del precio en el período anterior $t-1$. Esta es una suposición realista, especialmente cuando se trata de la oferta de productos agrícolas[7], donde existe, hasta cierto punto, un período fijo de producción (desde la siembra hasta la cosecha, en la agricultura; el período de la cría en la ganadería).

[7] Consideraciones pormenorizadas sobre la función de la oferta y de la demanda pueden encontrarse, p, ej., en el capítulo II del libro de O. Lange, *Wstep do ekonometrii*, 2.ª ed., PWN, Varsovia 1961. En la misma obra se trata de la formación de los ciclos especiales y del llamado fenómeno de la telaraña, que se hallan relacionados con el tema de este parágrafo.

Como es sabido, el equilibrio del mercado se da cuando la demanda x_t es igual a la oferta y_t. En este período t, tenemos entonces el adecuado *equilibrio periódico,* expresado por la ecuación

$$ap_t + \alpha = bp_{t-1} + \beta .$$

De donde

$$ap_t = bp_{t-1} + (\beta - \alpha) . \qquad [3.32]$$

Es más cómodo sustituir la ecuación diferencial [3.32] por una ecuación reducida equivalente, en la cual la desviación del *precio del equilibrio final* aparece como una variable, determinada por la intersección de la línea de la demanda con la línea de la oferta, como se representa en la figura 46.

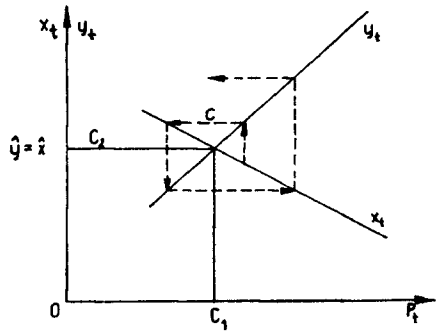


FIG. 46

Obtenemos el precio del equilibrio final $\hat{p}$ de la ecuación [3.32] suponiendo que $p_t = p_{t-1}$, es decir que el precio no ha cambiado. Entonces

$$\hat{p} = \frac{\beta - \alpha}{a - b},$$

de modo que la desviación del precio en el período t del precio del equilibrio final es

$$\bar{p}_t = p_t - \frac{\beta - \alpha}{a - b}.$$

La introducción de una nueva variable $\bar{p}_t$ es como se ve en la figura 46, equivalente al desplazamiento del comienzo del sistema de la coordenada al punto de "equilibrio final" C. En contraposición, la ecuación del equilibrio periódico puede expresarse así[8]:

$$a\bar{p}_t = b\bar{p}_{t-1}$$

o

$$\bar{p}_t = \frac{b}{a}\bar{p}_{t-1}\,. \qquad [3.33]$$

Esto lo conocemos por los ejemplos anteriores (§ 4 y § 5), la ecuación diferencial reducida, cuya solución da la serie siguiente:

$$\bar{p}_1 = \frac{b}{a}p_0\,; \quad \bar{p}_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2\bar{p}_0 \quad \bar{p}_3 = \left(\frac{b}{a}\right)^3\bar{p}_0\,; \ldots .$$

Generalmente, tenemos entonces

$$\bar{p}_t = \left(\frac{b}{a}\right)^t\bar{p}_0\,. \qquad [3.34]$$

Aquí $\bar{p}_0$ significa la desviación inicial del precio de equilibrio final (perturbación). A base de la solución general [3.34] determinamos que el proceso de la formación del precio de mercado es estable, si, $|\frac{b}{a}| < 1$.

El resultado obtenido es semejante a los ya obtenidos anteriormente. Sin embargo, hay cierta diferencia, es decir, el operador de la proporcionalidad $\frac{b}{a}$ en el caso dado es negativo, puesto que la función de la *oferta es decreciente,* así que su coeficiente de sentido es $a < 0$; en consecuencia tenemos $\frac{b}{a} < 0$.

De ahí resulta que las desviaciones del precio de equilibrio final $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_t$, son alternativamente positivas y negativas, es decir los precios de unos años determinados oscilan alrededor del precio de

[8] La nueva ecuación diferencial [3.33] se puede obtener también sustituyendo en la acuación [3.32] las expresiones:

$$p_t = \bar{p}_t + \frac{\alpha-\beta}{a-b} \quad \text{y} \quad p_{t-1} = \bar{p}_{t-1} + \frac{\alpha-\beta}{a-b}$$

equilibrio final. Y, por ejemplo, si $p_0 = 1$ y $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$, entonces la serie de las desviaciones reiteradas del precio del equilibrio final es la siguiente: $1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

La amplitud de estas oscilaciones, 1) es creciente, cuando $|\frac{b}{a}| > 1$ y entonces el proceso es inestable; 2) es decreciente cuando $|\frac{b}{a}| < 1$, y entonces el proceso de la formación de los precios tiende al equilibrio, es decir, es estable.

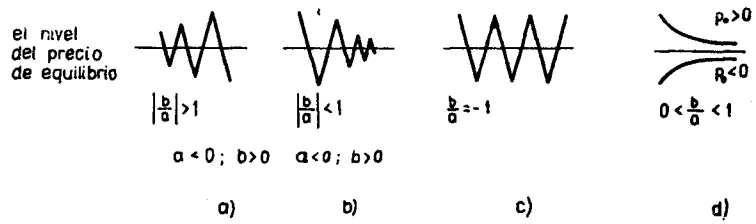


FIG. 47

Cuando $\frac{b}{a} = 1$, la amplitud de las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio es constante.

Si $0 < \frac{b}{a} < 1$, lo que en la práctica es un fenómeno muy raro, entonces el proceso tiende al estado de equilibrio uilateral (monótono) desde arriba o desde abajo, en función de la dirección (el año) primitiva (perturbación). Lo ilustran las siguientes series numéricas:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \quad \left(\frac{b}{a} = \frac{1}{2},\ \bar{p}_0 = 1\right).$$

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots \quad \left(\frac{b}{a} = \frac{1}{2},\ \bar{p}_0 = -1\right).$$

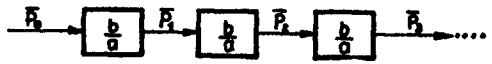


FIG. 48

Todos los casos arriba descritos están representados en la figura 47. El esquema de bloques en el cual de acuerdo con [3.33] se lleva a cabo la reducción de la retroacción, se ha representado en la figura 48.

CAPÍTULO IV

LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DE REGULACION

§ 1. Análisis general de la dinámica de los procesos de regulación

En el § 3 del capítulo anterior hemos mostrado que el operador que aparece en la fórmula fundamental de la teoría de la regulación, $y=\frac{S}{1-SR}x$ puede interpretarse en ciertas ocasiones como la suma de la progresión geométrica infinita

$$\frac{1}{1-SR}=1+(SR)+(SR)^2+(SR)^3+\ldots .$$

La fórmula fundamental de la regulación toma entonces la forma siguiente:

$$y=[1+SR+(SR)^2+\ldots]\ Sx$$

o

$$y=Sx+(SR)\,Sx+(SR)^2\,Sx+\ldots .$$

Para analizar con más precisión la dinámica del proceso de regulación, hay que tomar en consideración el hecho de que las reacciones que se dan en el sistema de regulación requieren cierto tiempo. Entonces, las variables x e y tienen que ser fechadas. Pongamos por caso que sobre el regulador, en un cierto período t, actúa la magnitud y_{t-1}, es decir el valor de la variable y del período anterior. Entonces la fórmula fundamental de la regulación toma la siguiente forma:

$$y_t=S(x_t+Ry_{t-1})\,. \qquad [4.1]$$

En otras palabrasa, partimos de que existe cierto retraso de la acción del regulador en el tiempo (llamado *time-lag*), y con ello po-

demos considerar esta tardanza como la unidad para medir el tiempo.

La fórmula [4.1] puede ser transformada en los términos siguientes:

$$y_t = SRy_{t-1} + Sx_t$$

o (introduciendo en la fórmula el operador E^{-1})

$$y_t = SR\,E^{-1}\,y_t + Sx_t\,.$$

Determinando en la última ecuación y_t obtenemos la fórmula:

$$y_t = \frac{S}{1 - SRE^{-1}}\,x_t\,, \qquad [4.2]$$

que es análoga a la fórmula fundamental de la regulación en el caso de la reacción inmediata.

En la ecuación diferencial [4.1] se puede realizar la regulación de la retroacción introduciendo la variable $\bar{y}_t$, que es la desviación de la variable $\bar{y}_t$ del estado de equilibrio del sistema que está determinado por la fórmula $\hat{y} = \frac{S}{1 - SR}\,x$. Obtenemos entonces

$$\bar{y}_t = y_t - \frac{S}{1 - SR}\,x = SRy_{t-1} + Sx - \frac{Sx}{1 - SR} = SRy_{t-1} - \frac{S^2 Rx}{1 - SR}\,,$$

es decir $\bar{y}_t = SR\left(y_{t-1} - \frac{S}{1 - SR}\,x\right)$.

Como resultado obtenemos la ecuación diferencial reducida

$$\bar{y}_t = SR\bar{y}_{t-1}\,, \qquad [4.3]$$

puesto que

$$y_{t-1} - \frac{S}{1 - SR}\,x = y_{t-1} - \hat{y} = \bar{y}_{t-1}\,.$$

Y la solución de la ecuación reducida [4.3] es la siguiente

$$\bar{y}_t = (SR)^t \bar{y}_0\,. \qquad [4.4]$$

La solución [4.4] permite investigar el curso del proceso de la regulación en el tiempo. Como sabemos, la condición de la estabilidad es que el valor absoluto del operador SR sea menor que 1, es

decir $|SR| < 1$, con que —como se ha anotado— el valor absoluto del operador es el límite superior del valor absoluto de su razón de transformación [1].

La condición $|SR| < 1$ se puede también expresar en la forma $|R| < \frac{1}{|S|}$: llamaremos al valor absoluto R *potencia del regulador,* y al valor absoluto S *potencia del sistema regulado.* Podemos decir entonces que la condición de estabilidad del sistema de regulación es que la potencia del regulador sea menor que la inversión de la potencia del sistema regulado. En tal caso decimos también que la retroacción es *compensadora.*

La formulación de la condición de estabilidad del sistema, presentada arriba, es fácil de interpretar. Si el regulador tiene que funcionar de manera efectiva, tiene que disminuir las perturbaciones que aparezcan en el sistema. Cuando $|R| > \frac{1}{|S|}$, el funcionamiento del regulador es demasiado fuerte y el proceso que se da en un sistema dado se aleja del estado de equilibrio. Decimos entonces que tiene lugar una retroacción *acumulativa,* lo que ocurre cuando la potencia del regulador es mayor que la inversión de la potencia del sistema regulado. En el caso $|R| = \frac{1}{|S|}$, es decir cuando la potencia del regulador es igual a la potencia del sistema regulado, el sistema se halla, como decimos, en el *límite de la estabilidad,* las perturbaciones aparecidas no se suprimen ni aumentan, cada estado es el de equilibrio.

A los operadores del regulador del sistema regulado vamos a darles —en los casos donde sea correcto— un signo determinado: más o menos. En los casos en que la transformación consiste en la multiplicación por un número real (la transformación proporcional), la adjudicación de un signo al operador de un sistema determinado no presenta grandes dificultades. Como signo del operador tomamos el signo de dicho número real. En el caso de los operadores de otras transformaciones, dar al operador un signo requiere multiplicarlo por un operador unitario de proporcionalidad $+1$, o -1. Escogemos el

[1] Véase el § 3, cap. III. El valor absoluto del operador lineal casi siempre se llama *norma.*

signo de los operadores de tal manera que a los operadores R y S les daremos el mismo signo, siempre que el cambio del estado de la salida del regulador tenga el mismo signo que el cambio del estado de la salida del sistema regulado y les daremos signos diferentes en caso contrario.

Suponiendo que al operador le hemos asignado un signo determinado, es fácil observar —a partir de la fórmula [4.4]— que si el signo del operador S es el mismo que el del operador R, o sea, cuando el signo S=signo R, el transcurso de la perturbación en el sistema considerado es unilateral (monótono). En otras palabras, en los períodos que se suceden a continuación, el sistema se halla constantemente por encima o por debajo del nivel de equilibrio.

Cuando S y R tienen el mismo signo, decimos que en el sistema de regulación se da una retroacción *positiva*.

Si los operadores S y R tienen los signos diferentes decimos que en el sistema de regulación se da una retroacción *negativa*. Entonces la perturbación tiene lugar de forma oscilatoria. Como se ve en la fórmula [4.4], la desviación $\bar{y}_t$ del estado de equilibrio en los períodos que siguen, cambia de signo, puesto que el factor t es alternativamente par e impar. Las oscilaciones aumentan, disminuyen o se mantienen constantes, según sea $|SR|>1$, $|SR|<1$, $|SR|=1$.

Estos resultados pueden verse en la siguiente tabla que muestra las áreas que corresponden a los diferentes valores de SR.

Area de oscilación			Area de monotonía	
$SR=-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
Area de la inestabilidad del sistema.	Area de estabilidad del sistema.			Area de la inestabilidad del sistema.
	límite izquierdo del área de estabilidad		límite derecho del área de estabilidad	

La ilustración gráfica de las casos particulares del curso de los procesos dinámicos se da en la figura 47 que muestra un ejemplo concreto de la dinámica de la formación del precio en el mercado

§ 2. La dinámica de los procesos continuos de regulación

En el parágrafo anterior hemos analizado la dinámica de un proceso discreto de regulación, es decir, que hemos supuesto que el regulador posee una acción discreta con una duración determinada Δ_t. Dicha duración la hemos tomado como unidad de tiempo, considerado $\Delta_t=1$. Conforme a esto obteníamos la ecuación reducida de la regulación, en forma de la ecuación diferencial [4.3], la cual (restándole de ambos miembros $\bar{y}_{t-1}$) se puede expresar también en la forma siguiente:

$$\bar{y}_t-\bar{y}_{t-1}=(SR-1)\bar{y}_{t-1}\,. \qquad [4.3a]$$

Supongamos ahora que la duración pueda tener un valor arbitrario Δt, que consideramos como un valor variable. Introduciendo el valor variable Δt en la ecuación reducida de la regulación, y suponiendo que la diferencia $\bar{y}_t-\bar{y}_{t-\Delta t}$ es proporcional a Δt, obtenemos en vez de la ecuación [4.3a] la ecuación

$$\bar{y}_t-\bar{y}_{t-\Delta t}=(SR-1)\bar{y}_{t-\Delta t}\Delta t \qquad [4.5]$$

o

$$\frac{\bar{y}_t-\bar{y}_{t-\Delta t}}{\Delta t}=(SR-1)\bar{y}_{t-\Delta t}\,. \qquad [4.5a]$$

En el caso $\Delta t=1$ esta ecuación se lleva a la ecuación [4.3a] o [4.3]. El primer miembro de la ecuación [4.5] expresa el aumento de la perturbación, en el período Δt, que constituye el retraso de la acción del regulador. Dicho aumento es tanto mayor cuanto más retrasado esté el regulador en su funcionamiento; es decir, constituye la función creciente de esta duración. Para las duraciones pequeñas, se puede considerar dicho aumento como proporcional a la duración Δt, lo que introduce el factor Δt en el segundo miembro de la ecuación.

Supongamos que la duración del funcionamiento del regulador

es cada vez más corta; es decir, que $\Delta t \longrightarrow 0$. Entonces la ecuación [4.5a] se transforma en la siguiente ecuación diferencial[2]

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = (SR-1)\bar{y}(t)\,. \qquad [4.6]$$

Esta ecuación describe el proceso *continuo* de regulación. En el caso de un proceso continuo, vamos a escribir t entre paréntesis, y no en forma de subíndice; así, $y(t)$ en vez de y_t, etc. Esto nos facilitará la diferenciación de los procesos continuos de los procesos discretos.

La solución de esta ecuación diferencial se puede expresar en esta forma conocida:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(0)\, e^{(SR-1)t}\,, \qquad [4.7]$$

donde la constante $\bar{y}(0)$ está determinada por la condición primaria del estado del sistema. Es decir, $\bar{y}(0)$ es la perturbación en el momento inicial $t=0$. En efecto, la ecuación diferencial [4.6] puede ser transformada en estos términos:

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\bar{y}t} = SR-1 \quad \text{o} \quad \frac{dln\bar{y}(t)}{dt} = SR-1\,.$$

Integrando ambos miembros obtenemos $ln\bar{y}(t) = (SR-1)t +$ constantes, o sea, $\bar{y}(t) = Ke^{(SR-1)t}$, donde K es constante. Haciendo $t=0$ tenemos que $K=\bar{y}(0)$.

Como resulta de la fórmula [4.7], la condición de la estabilidad del sistema es tal que $SR-1<0$, es decir, $SR<1$ o $R<\frac{1}{S}$. Por ejemplo, puede ser $SR=-2$ y el sistema también sería estable. Esta es la condición, diferente de aquella que hemos obtenido en el § 1. La estabilidad depende aquí, no de la potencia $|R|$ y $|S|$, sino de la razón de transformación R y S.

De modo que el proceso de regulación efectuado en un sistema en el cual el regulador funciona de una manera continua, posee siempre un carácter monótono y no surgen oscilaciones en él.

[2] Observamos que cuando $\bar{y}(t)$ es un vector, la fórmula [4.6] indica el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponden a determinados componentes del vector $\bar{y}(t)$.

El valor $\bar{y}(t)$ cuando $t \longrightarrow \infty$, es constantemente positivo o constantemente negativo, dependiente de $\bar{y}(0)$.

Pondremos ahora dos ejemplos del funcionamiento del sistema de regulación continua, el primero para la generalización continua del multiplicador keynesiano, y el segundo, para un proceso continuo de la formación del precio de mercado.

En el caso del modelo de Keynes, la ecuación reducida de la regulación adopta la formulación siguiente:

$$\bar{Y}_t = c\bar{Y}_{t-1}\,.$$

De manera análoga a la anterior, la ecuación puede ser representada de esta forma:

$$\frac{\bar{Y}_t - \bar{Y}_{t-\Delta t}}{\Delta t} = (c-1)\,\bar{Y}_{t-\Delta t}\,.$$

Suponiendo que $\Delta t \longrightarrow 0$, obtenemos la ecuación diferencial $\frac{d\bar{Y}(t)}{dt} = (c-1)\,Y(t)$, cuya solución es $\bar{Y}(t) = \bar{Y}(0)e^{(c-1)t}$. De la que se deduce que en el modelo continuo de Keynes el transcurso del proceso es siempre monótono. La condición de su estabilidad es $c<1$. Dado que hemos supuesto que $c>0$, nos encontramos en condiciones similares a las del caso discreto, es decir, $0<c<1$.

De manera similar se presenta la situación en el caso de un proceso continuo de formación del precio de mercado. La ecuación diferencial convenientemente reducida tiene la forma $\bar{p}_t = \frac{b}{a}\bar{p}_{t-1}$ que se puede transformar de la manera siguiente:

$$\bar{p}_t - \bar{p}_{t-\Delta t} = \frac{b}{a}\,\bar{p}_{t-\Delta t}\Delta t - \bar{p}_{t-\Delta t}\Delta t$$

y de aquí,

$$\frac{\bar{p}t - \bar{p}_{t-\Delta t}}{\Delta t} = \left(\frac{b}{a}-1\right)\bar{p}_{t-\Delta t}$$

Pasando al límite obtenemos la ecuación diferencial $\frac{d\bar{p}(t)}{dt} = \left(\frac{b}{a}-1\right)\bar{p}(t)$, cuya solución es

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(0)\, e^{\left(\frac{b}{a}-1\right)t}$$

La condición de la estabilidad del proceso continuo de formación del precio es $\frac{b}{a}-1<0$, o sea, $\frac{b-a}{a}<0$. Si, por ejemplo, $b<0$, entonces la condición de la estabilidad determina que el valor absoluto del parámetro b sea menor que el valor absoluto del parámetro a, o sea, $|b|<|a|$, lo que significa que el proceso de formación del precio de mercado es estable, independientemente de que la función de la oferta sea creciente o decreciente, solamente si el valor absoluto de su coeficiente direccional no sobrepasa cierto valor. Esta es la condición tradicional del equilibrio de mercado presentado por Walras, y la obtenemos suponiendo que la formación del precio de mercado es un proceso continuo.

Las fórmulas que caracterizan el curso del proceso continuo de regulación, podemos obtenerlas directamente por medio del cálculo de operadores. Como sabemos, la ecuación diferencial reducida puede ser expresada de la forma siguiente:

$$\bar{y}_t=SRE^{-1}\bar{y}_t \quad \text{o} \quad E\bar{y}_t=SR\bar{y}_t\,, \qquad [4.8]$$

donde E^{-1} es el operador de retrasamiento, de cierto valor en el tiempo $\Delta t=1$, y E el operador de adelantamiento, de cierto valor en el tiempo $\Delta t=1$.

Sabemos que hay cierta relación entre el operador E y el operador de la diferencia; o sea, $E=\Delta+1$ [3]. Aprovechando esta relación, la ecuación diferencial reducida [4.8] puede expresarse de la siguiente manera:

$$(\Delta+1)\bar{y}_t=SR\bar{y}_t\,,$$

y de aquí

$$\Delta\bar{y}_t=(SR-1)\bar{y}_t\,.$$

Sustituyendo el retraso constante igual a la unidad de tiempo, o sea, $\Delta t=1$, por un retraso variable Δt, tenemos

$$\Delta\bar{y}_t=(SR-1)\bar{y}_t\,\Delta t\,,$$

o sea,

$$\frac{\Delta\bar{y}_t}{\Delta t}=(SR-1)\bar{y}_t\,. \qquad [4.9]$$

[3] Véase § 5, cap. I.

Si $\Delta t\longrightarrow 0$, entonces el operador $\frac{\Delta}{\Delta t}$ del primer miembro de la ecuación tiende al operador de la diferenciación $\frac{d}{dt}=D$ [4]. Como resultado, si $\Delta t\longrightarrow 0$, la ecuación diferencial [4.9] se transforma en la acuación diferencial

$$D\bar{y}(t)=(SR-1)\bar{y}(t)\,,$$

que es idéntica a la ecuación diferencial [4.6] obtenida arriba por caminos diferentes.

§ 3. Los problemas prácticos de la regulación

El sistema de regulación se compone de dos elementos: el sistema regulado S y el regulador R. En las aplicaciones prácticas de la teoría de la regulación, casi siempre se supone que el primer elemento del sistema de regulación S viene dado y está determinado por las condiciones exteriores sobre las cuales no podemos influir, y el segundo, R, está construido de manera adecuada por el hombre y acoplado de alguna manera al sistema S.

El sistema regulado puede ser, por ejemplo, un determinado proceso económico objetivo S, que tiene lugar independientemente de los órganos de dirección de la economía nacional (por ejemplo, el aumento de la población, el aumento del consumo, la disminución de los ingresos del ahorro de la población, etc.), y el regulador R, ciertos instrumentos creados y dirigidos por el estado u otros órganos de la sociedad con el fin de influir sobre el curso del proceso S.

Otro ejemplo del regulador R puede ser un conjunto de medios técnicos y económicos que tienen que influir y regular, independiente-

[4] La prueba es instantánea. Sea $x(t)$ una función diferenciable (o sea, continua) de la variaable t. Por $\Delta x(t)$ expresamos la diferencia entre los valores de esta función, determinados para los valores $t+\Delta t$ y t de la variable independiente. Entonces $\Delta x(t)=x(t+\Delta t)-x(t)$. Puesto que la función es diferenciable, entonces

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\longrightarrow Dx(t)\,,$$

cuando $\Delta t\longrightarrow 0$. Frente a esto, el operador $\frac{\Delta}{\Delta t}$ tiende al operador D como límite.

mente del hombre, la influencia de la naturaleza sobre el curso y el desarrollo de la economía nacional. Un interesante ejemplo de la regulación es la formación de fondos de seguros y otras reservas previstas para nivelar las pérdidas producidas en la economía por desastres u otras causas debidas al azar. El sistema regulado S es aquí la economía nacional sobre la cual influyen el azar, independientemente de la voluntad y la acción del hombre, y el regulador R son los fondos del seguro, que impide que varíen la estabilidad, dirección y velocidad del desarrollo económico.

En la técnica encontramos numerosos sistemas regulados. En este caso, ambos elementos del sistema S y R están construidos por el hombre; sin embargo, su papel es diferente desde el punto de vista de la teoría de la regulación.

La tarea fundamental que proponemos para el aprovechamiento práctico de la teoría de la regulación, consiste en que el proceso que se lleve a cabo en el sistema S sea estable y conduzca al resultado deseado (al valor dado; es decir, a la norma). Se trata, en principio, de seleccionar la potencia del regulador R para que el proceso sea estable; es decir, para que todas las desviaciones del valor dado (norma) se eliminen automáticamente. Sabemos que en el caso del proceso discreto, la potencia del regulador R tiene que ser menor que la inversión de la potencia del sistema regulado; o sea, $|R| < \frac{1}{|S|}$, y en el caso del proceso continuo, la razón de transformación del regulador tiene que ser menor que la inversión de la razón de transformación del sistema regulado; o sea, $S < \frac{1}{R}$[5].

Los reguladores, cuyo fin es mantener la estabilidad del sistema, reciben también el nombre de *estabilizadores*. En la práctica, resulta imprescindible la aplicación de varios estabilizadores, lo que no crea dificultad teórica, puesto que —como se sabe— el funcionamiento de varios estabilizadores es equivalente al funcionamiento de un regulador cuya razón de transformación es igual a la suma de las razones de transformaciones de cada uno de los estabilizadores.

Los problemas de la regulación no se agotan en el problema de

[5] Véase el § 1 de este capítulo.

la estabilización de los sistemas de regulación. Por lo general, se trata también de que el sistema dado se mantenga estable por encima de un determinado nivel. En otras palabras: el valor del estado de la salida del sistema de regulación, debe ser igual a un valor dado z (la norma). Esta puede ser un número, un vector o una función. En el primer caso nos encontramos ante la regulación simple; o sea, la estabilización, y en el segundo —cuando z es una función— con el control (véase el capítulo I, § 4).

Puede suceder que el proceso de regulación tienda al estado de equilibrio $\hat{y}$, que difiere del valor dado z. La diferencia entre el nivel alcanzado por el sistema ya estabilizado y la norma, la indicaremos por la letra ϵ, y la denominaremos *desviación estática del sistema*. Tenemos entonces que

$$\epsilon = \hat{y} - z \,. \qquad [4.10]$$

Una situación similar (que en un sistema dado se dé una desviación estática) se presenta frecuentemente en la práctica. Decimos entonces que el funcionamiento del sistema de regulación contiene cierto *error sistemático*. Surge una pregunta: ¿Cómo evitar esto? Existen dos posibilidades: 1) mejorando el valor ajustador (alimentación de la entrada del sistema regulado) o 2) reconstruyendo el regulador, o lo que es lo mismo: incorporando al sistema un regulador suplementario. No hay otras posibilidades, puesto que el sistema S está objetivamente dado y sobre su funcionamiento no tenemos influencia alguna.

Calculemos la razón de transformación del regulador R, que corresponde al valor dado z. Partiendo de la fórmula fundamental de la regulación $y = \frac{S}{1 - SR} x$, en el cual tomamos $y = z$, obtenemos la ecuación

$$z - SRz - Sx = 0 \,.$$

de donde deducimos

$$R = \frac{z - Sx}{Sz}$$

o

$$R = \frac{1 - S\frac{x}{z}}{S} \qquad [4.11]$$

De la fórmula [4.11] resulta que la razón de transformación del regulador en el sistema estable depende del valor $\frac{x}{z}$; es decir, de la relación entre el valor de la entrada del sistema x (denominada alimentación del sistema) y la norma del sistema z. Si en el proceso de regulación aparece la desviación estática (el sistema de la regulación contiene un error sistemático) hay que reconstruir el regulador de manera que su razón de transformación cumpla la condición [4.11].

La regulación se puede, sin embargo, mejorar de otra manera; cambiando el estado de la entrada x, o sea, ajustando adecuadamente la alimentación del sistema regulado. De la fórmula fundamental de la regulación se deduce directamente que para alcanzar la norma dada $y=z$, el valor de la alimentación en el sistema estable tiene que ser

$$x=\frac{1-SR}{S}z\,. \qquad [4.11b]$$

En la práctica este segundo método de mejora de la acción del proceso de regulación es más fácil y más barato; se reduce a un adecuado aumento o disminución de la alimentación x.

Veremos a continuación algunos ejemplos de regulaciones de sistemas que se utilizan en la práctica. El primero es un ejemplo técnico. Se refiere a la regulación de la temperatura en un lugar dado. Supongamos que, por medio de un termostato adecuado, hemos alcanzado un sistema estable, con lo que el nivel de equilibrio de la temperatura es de 15°. Sin embargo, queremos alcanzar una temperatura de 18°. Podemos solucionar este problema de dos maneras: primera, se puede intentar reconstruir el regulador (en este caso el termostato), de modo que la temperatura alcance, en estado de equilibrio, la norma $z=18°$. Segunda, también podemos variar la alimentación, agregando y determinando a base de pruebas una cantidad suplementaria de combustible que caliente el cuarto.

El segundo ejemplo es de carácter económico. Se sabe que los gastos reales de la inversión son, por regla general, superiores a lo previsto. Esto se debe a causas diversas: 1) nunca se pueden prever al céntimo los costes de construcción de un gran número de plantas

nuevas; 2) en el transcurso de la realización de la inversión se encuentran dificultades imprevistas, por ejemplo, al excavar una mina se encuentran vetas de piedra, aguas subterráneas, etc.; 3) en el transcurso de la construcción, el adelanto técnico nos obliga a introducir innovaciones y cambios imprevistos al principio, puesto que, de otra manera, la planta estaría técnicamente anticuada en el momento de entregarla.

Es posible que durante la realización de la inversión aparezcan ciertos adelantos técnicos que disminuyan los costes de construcción; sin embargo, la distribución de la probabilidad del aumento y la disminución de los costes de ralización de la inversión es asimétrica en alto grado; es mucho mayor la probabilidad de sobrepasar los costes planificados que la de realizar la inversión con un coste menor.

Parece, a primera vista, que sería muy difícil construir un regulador que nos proteja contra este fenómeno; es decir, que estabilice los costes de realización de la inversión, al nivel planificado. Sin embargo, la situación no es un callejón sin salida y se puede tratar de aplicar impulsos económicos que debiliten las tendencias a sobrepasar los costes de inversión planificados[6]. Esta tendencia puede reducirse, por ejemplo, mediante una adecuada tasa aplicada a los medios fijos que se hallen a disposición de una empresa o fábrica determinadas desde el comienzo de la realización de la inversión; o sea, desde el momento de congelar los medios para una determinada unidad económica. También se puede introducir una multa o "tasa de castigo" que se cargará al inversionista cuando sobrepase los costes planificados de realización de la inversión.

Un aparato de este tipo consiste (utilizando términos de la teoría de la regulación) en una reconstrucción del regulador de un proceso económico dado. También se puede actuar de otro modo y cambiar la alimentación del sistema regulado, lo que en el caso dado consistiría en un adecuado aumento de los costes de

[6] En la práctica, nos podemos oponer a lo que podríamos llamar "enquistarse en el plan", que consiste en que las empresas u otras organizaciones, rebajen en el proyecto los costes de aquellas inversiones en las que estén especialmente interesadas, suponiendo que la inclusión en el plan de una determinada inversión implica su financiación a ultranza, aunque sobrepase los costes previstos.

inversión proyectados. Si, por ejemplo, el presupuesto inicial de los costes de inversión alcanza la cifra de 10 millones de zlotys, habría que introducir en el plan un aumento del 10 por ciento, p. ej.; o sea, 11 millones de zlotys.

Presentemos todavía otro ejemplo muy simple que ilustra los medios de mejorar un proceso de regulación, en el cual aparece un error sistemático. Si una balanza muestra una desviación constante en la medición, se puede reparar o —lo que es más fácil— agregarle una "alimentación compensadora" que, en este caso, consistirá en poner sobre uno de los platillos de la balanza una pesa adecuada.

Aparte de los dos problemas fundamentales de la regulación de los sistemas ya descritos (asegurar la estabilidad del sistema y alcanzar el valor dado), existen otros problemas relacionados con la regulación. A estos problemas suplementarios pertenece, sobre todo, la valoración de la eficiencia. La valoración de la eficiencia de la regulación consiste en determinar cuál de los reguladores aplicables en un caso dado anula más rápidamente la perturbación. Esto es importante, puesto que en la práctica tratamos de aplicar el regulador más eficaz.

Puede surgir también un problema práctico si queremos aplicar el regulador que conduce a la estabilización del sistema a través de las oscilaciones; o sea, de manera monótona. A esto se une también el problema de si las oscilaciones que conducen en último término a la estabilización deben ser de gran amplitud y extinguirse rápidamente o, por el contrario, tener menor amplitud y mayor duración.

Llamaremos a todas las características de este tipo de los reguladores *eficiencia del regulador*. De los problemas de la eficiencia nos ocuparemos en otra parte de nuestro trabajo. Volvamos de momento al problema de la estabilidad del sistema de regulación.

§ 4. Un ejemplo: el problema de la reacción a los estímulos

Resulta que mediante métodos matemáticos, parecidos a los aplicados a la teoría de la regulación, se pueden resolver ciertos problemas relativos a la reacción de los organismos vivos (animales y humanos) a los estímulos externos. Los problemas de este tipo tienen importancia práctica, no solamente en la psicología, sino también en el cálculo económico.

Analicemos el siguiente ejemplo[7]:

Supongamos que p_{n+1} significa la probabilidad de que un animal reaccione de una manera deseada por el investigador ante un conjunto dado de estímulos, después de $n+1$ repeticiones, a las que denominaremos *probabilidad de reacción*. Las investigaciones estadísticas sobre el comportamiento animal demuestran que la probabilidad p_{n+1} depende de las reacciones anteriores del animal a un conjunto dado de estímulos. La probabilidad p_{n+1} es tanto mayor cuanto mayor es la probabilidad de reacción después de la enésima repetición de los estímulos, por lo que bien puede tomarse esta relación como lineal. De esto se sigue la posibilidad de enunciar la siguiente ecuación diferencial:

$$p_{n+1}=a+mp_n\,, \qquad [4.12]$$

que indica que p_{n+1} es una función lineal p_n. Naturalmente, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$ y $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant 1$, puesto que esas variables significan las probabilidades[8], y $m \geqslant 0$, ya que la incesante repetición de los estímulos aumenta (y en todo caso no disminuye) la probabilidad de reacción.

La ecuación [4.12] expresa el transcurso del proceso de adquisición, por parte del animal, del hábito de reaccionar a un conjunto dado de estímulos. Por ello se la denomina también a menudo *ecuación del aprendizaje*. Los parámetros a y m se determinan a base de experimentos.

Es más cómodo presentar la ecuación [4.12] de otra manera. Escribamos $m=1-a-b$, donde $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, puesto que $m \geqslant 0$, por lo que $1-a-b \geqslant 0$.
Entonces

$$p_{n+1}=a+(1-a-b)\,p_n=p_n+a\,(1-p_n)-bp_n \qquad [4.13]$$

---

[7] Tomamos este ejemplo del libro de S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations*, Nueva York-Londres 1958, págs. 103 y sgs. Se basa en un enfoque dado por R. R. Bush y F. Mosteller, *A Mathematical Model for Simple Learning*, "Psychological Review", 1951.

[8] La ecuación diferencial [4.12] es un ejemplo de la llamada "cadena de Markov", que es el caso más sencillo del proceso estocástico.

o sea,

$$p_{n+1}-p_n=a(1-p_n)-bp_n\,. \qquad [4.13a]$$

La ecuación en la forma [4.13a] demuestra de qué depende la rectificación de la reacción del animal a un estímulo; o sea, el progreso en el proceso de "aprendizaje". Este progreso se expresa en la diferencia $\Delta p_{n+1}=p_{n+1}-p_n$, que aparece en el primer miembro de la ecuación.

Reparemos en el significado de las expresiones $(1-p_n)$ y $-p_n=$ $=0-p_n$ que aparecen en el segundo miembro de la ecuación [4.12]. La primera de estas expresiones determina el grado máximo posible de mejoramiento y el segundo el grado máximo posible de empeoramiento de los resultados del experimento, puesto que el resultado óptimo que se puede alcanzar es $p_{n+1}=1$, y el peor $p_n+1=0$. En cambio, $\Delta p_{n+1}=p_{n+1}-p_n$, o sea, el mejoramiento actual de los resultados del experimento es igual —como se deduce de la ecuación [4.13a]— a la suma comparativa del grado máximo probable de mejoramiento y el grado máximo probable de empeoramiento de los resultados del experimento. En esta suma los coeficientes de comparación son los parámetros a y b; el parámetro a depende de un conjunto de circunstancias, que tienden al mejoramiento máximo de los resultados del experimento, y el parámetro b, depende de las circunstancias que influyen en el máximo empeoramiento de los resultados del experimento. Así, pues, el parámetro a puede ser considerado como el computador de la intensidad del funcionamiento de los estímulos positivos y el parámetro b como el computador de la intensidad del funcionamiento de los estímulos negativos; es decir, los llamados *antiestímulos*. Por ejemplo, los estímulos positivos pueden ser premios y los estímulos negativos castigos u otros procedimientos desagradables que se asocian a la reacción del animal.

Solucionemos la ecuación [4.13] por un método que ya hemos aplicado varias veces. Determinemos antes de nada si se da un estado de equilibrio y a qué valor $\hat{p}$ corresponde este estado. Con este fin cambiemos la ecuación diferencial [4.13] por una ecuación simple suponiendo que las variables $p_{n+1}=p_n=\hat{p}_n$, o sea, que la probabilidad de reacción se ha estabilizado en un nivel

fijo. Obtendremos entonces la ecuación

$$\hat{p}=a+(1-a-b)\hat{p}\,,$$

de donde

$$\hat{p}=\frac{a}{a+b}\ \text{(suponiendo que } a+b\neq 0)\,.$$

Conocido el valor de la variable que corresponde al estado del equilibrio p, calculemos a su vez el alcance de las desviaciones de este valor

$$\bar{p}_n=p_n-\hat{p}=p_n-\frac{a}{a+b}\,.$$

De donde

$$p_n=\bar{p}_n+\frac{a}{a+b}$$

y de manera parecida

$$p_{n+1}=\bar{p}_{n+1}+\frac{a}{a+b}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación [4.13] obtenemos la ecuación diferencial reducida:

$$\bar{p}_{n+1}+\frac{a}{a+b}=a+(1-a-b)\,\bar{p}_n+(1-a-b)\frac{a}{a+b}\,,$$

que después de la reducción adopta la siguiente forma:

$$\bar{p}_{n+1}=(1-a-b)\,\bar{p}_n\,. \qquad [4.14]$$

La solución de esta ecuación se puede obtener inmediatamente por el método de recurrencia:

$$\bar{p}_{n+1}=(1-a-b)^{n+1}\,p_0\,, \qquad [4.15]$$

donde p_0 es la probabilidad de la salida, por lo que es igual a la probabilidad que existe antes de iniciarse el experimento de que el animal reaccione a un conjunto dado de estímulos.

Considerando que $1-a-b\geqslant 0$, de la fórmula [4.15] se deduce que la condición de estabilidad del proceso de aprendizaje del animal que reacciona a un determinado conjunto de estímulos es el cumplimiento de la doble desigualdad: $0<1-a-b<1$, de lo que

resulta que $0 < a+b < 1$. Si esta condición se cumple, entonces si $n \longrightarrow \infty$, $\bar{p}_{n+1} \longrightarrow 0$, $p_{n+1} \longrightarrow \frac{a}{a+b}$; es decir, tiende al estado de equilibrio.

Si $a+b=0$ (o sea, $1-a-b=0$), la fórmula [4.15] puede aplicarse, pero entonces $p_{n+1}=p_0$; es decir, la probabilidad de reacción durante el transcurso del proceso no varía y es constantemente igual a la probabilidad de salida p_0. El animal no adelanta en el "aprendizaje".

Analicemos con mayor detenimiento la solución obtenida. En la suposición de que $0 < a+b < 1$, tenemos que $p_{n+1} \longrightarrow \frac{a}{a+b}$ cuando $n \longrightarrow \infty$. ¿Qué significa este resultado? Significa que, al repetir varias veces el experimento, la probabilidad de reacción del animal a un conjunto determinado de estímulos se aproxima a cierto límite que es igual a la relación del computador de los estímulos positivos, a la suma de los computadores de los estímulos positivos y estímulos negativos (antiestímulos).

Consideremos algunos casos especiales.

1. Cuando $a=0$, y $b \neq 0$, entonces $p_{n+1} \longrightarrow 0$; esto significa que cuando se aplican solamente los antiestímulos, el animal se acostumbrará a no reaccionar, puesto que siempre se encuentra con el "castigo".

2. Cuando $a \neq 0$ y $b=0$, entonces $p_{n+1} \longrightarrow 1$; es decir, en el caso de aplicar solamente los estímulos positivos, el proceso de aprendizaje del animal alcanzará un estado tal que el animal reaccionará "con seguridad" o "casi con seguridad" [9], a un estímulo determinado.

3. Cuando $a=b=0$, entonces $p_{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$, lo que significa que con la misma intensidad de estímulos y antiestímulos, la probabilidad de reacción tiende a $\frac{1}{2}$. Tras un número de experimentos, el animal se halla desorientado hasta tal punto que solamente reacciona en la mitad de los casos.

[9] Si la probabilidad está determinada por un conjunto limitado, entonces $p=1$ implica que el caso es seguro; en cambio, cuando la probabilidad está determinada por un conjunto ilimitado o incalculable, entonces $p=1$ significa que el hecho es "casi seguro"; es decir, los casos en los cuales los hechos no ocurren constituyen el conjunto de medida 0.

Vale la pena hacer notar que el resultado del proceso de aprendizaje descrito, en el caso general, no depende del valor absoluto de los estímulos positivos y de los antiestímulos, sino solamente de la relación $r=\frac{a}{b}$, o sea de la relación entre el cuantificador de los estímulos positivos, y el cuantificador de los antiestímulos. Efectivamente, $\hat{p}_{n+1} \longrightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} = \frac{r}{1+r}$.

La relación $r=\frac{a}{b}$ es entonces el cuantificador del método aplicado en la enseñanza y puede denominársele la *estructura de la motivación.* Del valor absoluto de los estímulos positivos y de los antiestímulos, depende sin embargo el número de las repeticiones del experimento, necesarias para alcanzar el resultado. Como se deduce de la fórmula [4.15] la velocidad de concurrencia es tanto mayor cuanto menor es el valor $1-a-b$, o sea cuanto mayor es el valor $a+b$. Así pues, el resultado del proceso de aprendizaje depende de la estructura de la motivación y de la rapidez con la que se alcance el resultado; es decir, de la intensidad conjunta de la motivación

El problema presentado constituye un ejemplo interesante de la aplicación de métodos matemáticos (ecuaciones diferenciales) a la solución y análisis de ciertos problemas psicológicos. Se puede, por ejemplo, proponer el siguiente problema: ¿Con qué intensidad deben aplicarse los estímulos positivos y los antiestímulos para alcanzar una probabilidad determinada de reacción en un animal, o sea para que $p_{n+1} \longrightarrow z$, donde z es la magnitud dada? El problema así formulado es típico de la teoría de la regulación.

La solución de este problema es inmediata. Efectivamente, suponiendo que $p_{n+1} \longrightarrow z$, obtenemos la ecuación $\frac{r}{1+r}=z$ y de ahí $r=\frac{z}{1-z}$. Si la relación de los estímulos positivos a los antiestimu-

los es igual a $\frac{z}{1-z}$, entonces $p_{n+1} \longrightarrow z$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Si suponemos, por ejemplo, que $z=\frac{95}{100}$, entonces $r=\frac{\frac{95}{100}}{1-\frac{95}{100}}=19$, lo que significa que $\frac{a}{b}=19$. Los estímulos positivos tienen que ser 19 veces más fuertes que los antiestímulos.

El problema de la regulación puede aplicarse a la solución de ciertos problemas económicos, si nos basamos en que las reacciones de los humanos a los estímulos positivos y a los antiestímulos se elaboran según el mismo o parecido esquema. Los estímulos positivos en las acciones de determinadas personas o conjuntos, son toda clase de premios, ganancias, etc., y los antiestímulos son castigos, pérdidas surgidas por causa de la quiebra de una empresa, etc.

¿Qué conclusiones prácticas se derivan de los resultados del análisis realizado, con respecto a la posible eficacia de los estímulos positivos y de los antiestímulos en la práctica económica?

Si la probabilidad de alcanzar una meta determinada tiene que ser mayor de $\frac{1}{2}$, la intensidad de los estímulos positivos (por ejemplo, la ganancia esperada) tiene que ser mayor que la de los antiestímulos (posibilidad de pérdidas). He aquí una indicación clara, que debe ser aprovechada en el sistema de los premios. Si la actividad de un hombre o de un conjunto de personas (por ejemplo, una empresa) está relacionada con la probabilidad de que haya pérdidas (antiestímulos), hay que aplicar los estímulos positivos (premios, ganancias suplementarias, etc.) con mayor intensidad que la de los antiestímulos existentes.

A este respecto podemos preguntarnos si merece la pena luchar contra los antiestímulos cuando se puede debilitar su acción aumentando de manera adecuada los estímulos. Naturalmente, la aplicación de este método es posible, sobre todo cuando la eliminación de los antiestímulos tropieza con grandes dificultades. Sin embargo, desde el punto de vista económico este procedimiento no es correcto, puesto que exige la concesión de premios muy altos que sobrepasen notablemente la intensidad de los antiestímulos Se puede conseguir el mismo efecto de forma más económica, disminuyendo e incluso eliminando los antiestímulos. De la ecuación $z=\frac{r}{1+r}$ se deduce que si deseamos alcanzar un grado muy alto en la certidumbre de cierta reacción (o sea $z \cong 1$), r tiene que ser muy alto. Puesto que $r=\frac{a}{b}$, necesitaríamos un valor de a muy alto cuando b es notablemente mayor que cero, es decir grandes premics, ganancias, etc. En cambio se puede obtener el mismo resultado con la consiguiente disminución de premios y ganancias si $b \cong 0$. es decir eliminando los antiestímulos.

De esto se deduce una conclusión práctica: que la eficaz activación de un proceso económico requiere antes que nada la eliminación de los antiestímulos que frenan tales actividades. Naturalmente esto no siempre es posible. Hay que señalar que para alcanzar rápidamente la meta se necesita un adecuado valor de los estímulos positivos, ya que, como hemos visto, la velocidad de recurrencia del proceso de reacción a los estímulos, con el resultado arriba descrito, depende del valor absoluto de la suma $a+b$. Aunque con el valor constante a, la disminución de b mejora en realidad la estructura de la motivación r, se da al mismo tiempo la disminución de la suma $a+b$ (la intensidad de los estímulos) que determina la velocidad de la concurrencia. Para alcanzar una velocidad notable es necesario un valor adecuado de los estímulos positivos.

Un interesante ejemplo de cómo inducir a los campesinos a cultivar ciertas plantas industrializables, especialmente sometidas a riesgos atmosféricos (congelación, sequía, granizo, etc.) eliminando los antiestímulos de estas actividades económicas, es la aplicación de un seguro general contra los riesgos de las llamadas siembras "contratadas". La práctica demostró que incluso grandes aumentos de los precios de venta de ciertas plantas (o sea un aumento de los estímulos positivos) no influyen de manera efectiva en el incremento de las áreas de cultivo. En cambio, la eliminación de los antiestímulos por medio de la aplicación de los seguros, cuya financiación

es relativamente barata, produce un notable incremento de las plantaciones de ciertas plantas industrializables [10].

Podemos suponer que la aplicación de un método parecido de eliminación de los antiestímulos también es posible y efectiva, en otras ramas de la actividad económica. Así, por ejemplo, la introducción de los seguros contra las pérdidas que pueden aparecer transitoriamente en una determinada empresa en curso de modernización pudiera impulsar a muchas otras empresas a adoptar similares programas de modernización. Es de suponer que este método sería mucho más económico y a la vez más efectivo que el incremento de los premios por modernización.

[10] Véase el trabajo colectivo redactado por A. Banasinski, *Ubezpieczenia panstwowe w Polsce Ludowej w liczbach*, PWE, Varsovia 1959, pág. 182 y sgs.

CAPÍTULO V

ENFOQUE GENERALIZADO DE LA TEORIA DE LA REGULACION

§ 1. La ecuación de equilibrio del sistema

La teoría general de la estabilidad de los sistemas que se desarrollan en este capítulo se puede formular por medio de dos operadores solamente: el operador de la proporcionalidad k y el operador de la diferencia D, o el operador de la proporcionalidad k y el operador de adelantamiento E.

En el § 5 del Cap. I hemos demostrado que el funcionamiento de cada sistema lineal de regulación se puede representar por medio de tres operadores elementales: 1) el operador de la proporcionalidad, cuya misión consiste en multiplicar el estado de la entrada del elemento por un número real k; 2) el operador de la diferenciación D, y 3) el operador de adelantamiento E. A estos tres operadores elementales se pueden reducir todos los demás y en especial sus inversos, a saber: 1) el operador de la integración $D^{-1}=\int \dots dt$, y 2) operador de retrasamiento E^{-1}.

El operador de la diferenciación D y el operador de adelantamiento E son intercambiables, es decir, uno de ellos puede sustituirse por el otro. De este modo el número de operadores lineales fundamentales se puede reducir a dos.

Hemos demostrado más arriba que el operador $\frac{\Delta}{\Delta t}$ tiende al operador D como límite, cuando $\Delta t \longrightarrow 0$. Ya nos hemos servido de esta tendencia al límite con anterioridad. Sin embargo, puede demostrarse, sin la tendencia al límite, la relación directa entre el operador E (y a la vez también el operador Δ) y el operador D.

Supongamos que $x(t)$ sea una función continua de la variable t, diferenciable cualquier número de veces. Señalemos que $x(t+\Theta)=E^{\Theta}$, es decir E^{Θ} será el operador de la sustitución del valor $x(t)$ por el valor $x(t+\Theta)$, es decir, el operador de adelantamiento del argumento de la función por Θ [1]. El valor de la función $x(t+\Theta)$ se puede desarrollar en la serie de Taylor. Tenemos entonces

$$E^{\Theta}x(t)=x(t+\Theta)=x(t)+\frac{\Theta}{1!}x'(t)+\frac{\Theta^2}{2!}x''(t)+\ \dots\ ,$$

donde $x'(t)$, $x''(t)$, ..., son derivadas continuas en el punto t. Por medio del operador de la diferenciación D este resultado puede expresarse de la siguiente forma

$$E^{\Theta}x(t)=x(t)+\frac{\Theta}{1!}Dx(t)+\frac{\Theta^2}{2!}D^2x(t)+\ \dots\ ,$$

o sea

$$E^{\Theta}x(t)=\left(1+\frac{\Theta}{1!}D+\frac{\Theta}{2!}D^2+\ \dots\right)x(t)\,.$$

Y de aquí tenemos la equivalencia de los operadores

$$E^{\Theta}=1+\frac{\Theta}{1!}D+\frac{\Theta^2}{2!}D^2+\dots\,. \qquad [5.1]$$

El operador E^{Θ}, o sea el operador de adelantamiento del argumento de la función por Θ es pues equivalente a la serie potencial del operador D.

Sirviéndonos del conocido desarrollo de la función potencial en la serie potencial

$$e^{\Theta}=1+\frac{\Theta}{1!}+\frac{\Theta^2}{2!}+\ \dots\ ,$$

la fórmula [5.1] puede ser expresada en la forma

$$E^{\Theta}=e^{\Theta D} \qquad [5.2]$$

o también

$$\Theta D=lnE^{\Theta}. \qquad [5.2a]$$

[1] Anteriormente suponíamos que la función $x(t)$ es una serie numérica x_t y habíamos tomado $\Theta=1$; lo que es lo mismo, el operador de adelantamiento por un elemento de esta serie es E.

Suponiendo que $\Theta=1$, obtenemos finalmente

$$E=e^{D} \quad \text{o} \quad D=lnE\,. \qquad [5.3]$$

De esta manera queda determinada la relación entre los operadores E y D. Puesto que $\Delta=E-1$, tenemos [2] también la relación $\Delta=e^{D}-1$. El número de los operadores elementales se puede fijar, por lo tanto, en dos: el operador de la proporcionalidad k y el operador de la diferenciación D (o indistintamente el operador de adelantamiento E).

Como sabemos, cada sistema lineal de regulación puede considerarse como un conjunto de sistemas acoplados elementales, o sea elementos en los cuales se realizan transformaciones determinadas por los operadores elementales. La transformación conjunta que se realiza en el sistema la representamos en forma $y=Tx$, donde x es el estado de la entrada e y el estado de la salida del sistema, o también en términos de su transformación inversa $x=T^{-1}y$. La última de las señaladas es la forma especialmente adecuada para investigar los procesos de regulación, puesto que teniendo dado el valor del estado de la salida del sistema $y=z$, determinamos directamente el estado deseado de la entrada x (valor de ajuste llamado también alimentación del sistema), a saber $x=T^{-1}y$.

El operador T^{-1}, al igual que el operador T, es el resultado de las operaciones algebraicas sobre los operadores [3] elementales k, D y E^{Θ}

[2] De ahí obtenemos también la transición al límite utilizada anteriormente. Tenemos, pues,

$$\Delta\Theta=e^{\Theta D}-1=\frac{\Theta}{1!}D+\frac{\Theta^2}{2!}D^2+\dots,$$

o sea,

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}=D+\frac{\Theta}{2!}D^2+\dots,$$

Considerando Θ como una variable y escribiendo $\Theta=\Delta t$ para unificar con la notación utilizada anteriormente, tenemos

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}=D+\frac{\Delta t}{2!}D^2+\dots,$$

cuando $\Delta t\longrightarrow 0$, el operador $\dfrac{\Delta\Theta}{\Delta t}$ tiende al operador D.

[3] Como operador elemental tenemos aquí E^{Θ}, y no E, puesto que el adelantamiento Θ no siempre se puede expresar por medio de un número entero. Si Θ no es un número entero, el operador E^{Θ} no puede ser interpretado como la repetición Θ veces de la operación E; por lo tanto, tiene que ser tomado como un operador elemental.

o sobre sus operadores inversos. En cada elemento se realiza la transformación determinada por uno de los operadores elementales señalados (transformación proporcional, diferenciación o adelantamiento) o por un operador inverso adecuado (integración, atrasamiento). Los elementos no están acoplados entre sí por medio del acoplamiento en paralelo, en serie o retroacción. Como sabemos, el resultado de estos acoplamientos se expresa en forma de adición, multiplicación o división de los operadores (la sustracción es la adición de un operador multiplicado por el operador de la proporcionalidad $k=-1$).

En cambio, el operador T^{-1} (o el operador T), que indica la transformación conjunta que tiene lugar en el sistema de regulación, se puede representar en forma de un polinomio de los operadores D y E^{Θ}. Tenemos entonces

$$T^{-1}=\sum_{r=-k}^{l}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}\,D^{r}\,E^{\Theta_s}\,. \qquad [5.4]$$

En este polinomio los coeficientes a_{rs} son el resultado de la multiplicación de diversos valores k, correspondientes a las transformaciones proporcionales que se están efectuando; son pues números naturales. Los operadores D^r significan la diferenciación r-veces, si $r>0$, o la integración si $r<0$. Los operadores E^{Θ_s} significan el desplazamiento de Θ_s hacia adelante, si $\Theta_s>0$, o hacia atrás si $\Theta_s<0$. Si $r=0$, o $\Theta_s=0$, tenemos los operadores de identidad D^0 y E^{Θ}, que podemos desdeñar. Claro está que algunos, aunque no todos los coeficientes a_{rs} pueden ser iguales a cero. Suponemos que el número de elementos del sistema es limitado, de manera que los límites de la adición k (el número máximo de la repetición de integraciones), l (número máximo de las repeticiones de la diferenciación) y m ($m+1$ es el número de los adelantamientos), son finitos.

La transformación conjunta $x=T^{-1}$ que se efectúa en el sistema de regulación, se puede representar entonces de la forma siguiente

$$\left(\sum_{r=-k}^{l}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}\,D^{r}\,E^{\Theta_s}\right)y=x\,.$$

Considerando que x e y son funciones del tiempo $x(t)$ e $y(t)$ —las llamaremos *función de la entrada* y *función de la salida*— y que la función $y(t)$ es diferenciable e integrable el número de veces necesario, esta expresión es la anotación operatorial de la ecuación lineal funcional de coeficientes numéricos. A saber:

$$\left(\sum_{r=-k}^{l}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}\,D^{r}\,E^{\Theta_s}\right)y(t)=x(t)\,. \qquad [5.5]$$

o en forma no operatorial

$$\sum_{r=-k}^{l}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}y^{(r)}\,(t-\Theta_s)=x(t)\,, \qquad [5.5a]$$

donde $y^{(r)}(t-\Theta_s)$ significa la r-ava derivación (para $r>0$) o r-tuple integral (para $r<0$) de la función $y(t)$ en el momento $t-\Theta_s$.

Resolver la ecuación funcional es hacer una descripción lacónica del funcionamiento del sistema. En su conjunto, el segundo miembro de la ecuación describe el curso de la alimentación en el tiempo (magnitud ajustadora) de la entrada del sistema $x(t)$ y la ecuación determina la función $y(t)$ que representa el curso en el tiempo del estado de la salida del sistema. Solucionando la ecuación obtenemos el curso del estado de la salida que corresponde a un determinado curso de la entrada, por lo tanto, llamaremos a la ecuación [5.5] *ecuación de reacción del sistema.*

Podemos transformar la ecuación funcional [5.5] eliminando las integrales del primer miembro. Para ello introducimos una nueva función $y^*(t)=D^{-k}y^t$ en el segundo miembro de la ecuación [5.5]. Obtenemos entonces una ecuación equivalente

$$\left(\sum_{r=0}^{k+l}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}\,D^{r}\,E^{\Theta_s}\right)y^*(t)=x(t)\,. \qquad [5.6]$$

En el primer miembro de esta ecuación aparecen solamente los operadores de la diferenciación y del adelantamiento. Tenemos pues una ecuación *diferencia-diferencial*[4]. Resulta que la ecuación de reacción de un sistema lineal de regulación siempre puede expresarse en forma de una ecuación diferencia-diferencial. Los operadores de la diferen-

[4] La exposición más amplia y sistemática de la teoría de las ecuaciones diferencia-diferencial, y de sus métodos de solución, la dan R. Bellman y K. C. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Nueva York-Londres, 1961.

cia que aparecen en esta ecuación, expresan los procesos continuos y los operadores de adelantamiento los procesos discretos que se dan en el sistema de regulación.

En el caso especial de que todos los procesos que tengan lugar en el sistema de regulación sean continuos, la ecuación [5.6] se reduce a una ecuación lineal de coeficientes constantes [5].

$$a_0 y^*(t) + a_1 D y^*(t) + a_2 D^2 y^*(t) + \ldots + a_n D^n y^*(t) = x(t). \qquad [5.7a]$$

En cambio, en el caso de que todos los procesos sean discretos, la ecuación [5.6] queda reducida a una ecuación lineal diferencial de coeficientes constantes [6].

$$a_0 y^*(t) + a_1 E^{\Theta_1} y^*(t) + a_2 E^{\Theta_2} y^*(t) + \ldots + a_m E^{\Theta_m} y^*(t) = x(t). \qquad [5.7b]$$

Para simplificar, en adelante omitiremos el asterisco junto a la función $y^*(t)$ en la ecuación diferencia-diferencial [5.6] y en sus varios casos especiales.

La forma operatorial de la ecuación [5.6] permite expresar su solución en forma también operatorial, a saber:

$$y(t) = \left(\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} D^r E^{\Theta_s} \right)^{-1} x(t), \qquad [5.8]$$

y que $n = k + l$ en la fórmula [5.6]. Esta notación expresa la transformación $y = Tx$.

La solución [5.8] de la ecuación de reacción del sistema siempre puede representarse mediante la fórmula fundamental de la teoría de la regulación.

$$y(t) = \frac{S}{1 - SR} x(t). \qquad [5.9]$$

Con este fin expresamos la solución [5.8] en la siguiente forma

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} D^r E^{\Theta_s}} x(t)$$

[5] Una ecuación semejante aparece como ecuación fundamental en la teoría de los sistemas lineales de regulación empleados en la técnica.

[6] La primera expresión del primer miembro puede representarse siempre en la forma $a_0 = a_0 E^0$.

y descomponiendo el polinomio operatorial que aparece en el nominador de manera arbitraria, en dos componentes, obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\rho\sigma} D^{\rho} E^{\Theta\sigma} + \sum_{r \neq \rho} \sum_{s \neq \sigma} a_{rs} D^r E^{\Theta_s}} x(t).$$

Multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro, por $\left(\sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\rho\sigma} D^{\rho} E^{\Theta\sigma} \right)^{-1}$, obtenemos la siguiente ecuación

$$y(t) = \frac{\left(\sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\rho\sigma} D^{\rho} E^{\Theta\sigma} \right)^{-1}}{1 - \left(\sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\rho\sigma} D^{\rho} E^{\Theta\sigma} \right)^{-1} \left(- \sum_{r \neq \rho} \sum_{s \neq \sigma} a_{rs} D^r E^{\Theta_s} \right)} x(t). \qquad [5.10]$$

Escribiendo

$$S = \left(\sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\rho\sigma} D^{\rho} E^{\Theta\sigma} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad R = - \sum_{r \neq \rho} \sum_{s \neq \sigma} a_{rs} D^r E^{\Theta_s},$$

comprobamos que esta es la fórmula fundamental de la teoría de la regulación [5.9].

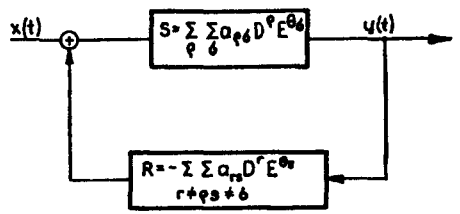


FIG. 49

Resulta que cada sistema lineal de acoplamiento se puede descomponer en dos partes, de las cuales una funciona como sistema regulado y otra como sistema regulador, o sea como regulador. Una parte de los elementos del sistema pertenece al sistema regulado y la restante al regulador. La distribución de los elementos en el sis-

tema regulado y en el regulador es arbitraria, pero todos los elementos no asignados a un sistema deberán estar acoplados al otro y el operador total de los elementos unidos al regulador estará sometido a una transformación proporcional $k=-1$, como queda demostrado en el esquema de bloques de la figura 49.

Puesto que la distribución de los elementos es arbitraria, existen muchas maneras de descomponer un sistema de acoplamiento en un sistema regulado y un regulador; todas estas maneras son equivalentes [7].

Para ilustrar analicemos el caso de que todos los procesos que se den en el sistema sean continuos y la ecuación de reacción del sistema tome la forma de una ecuación diferencial [5.7a]. Tendremos entonces

$$y(t)=\frac{1}{a_0+a_1 D+a_2 D^2+\ldots+a_n D^n}\,x(t)\,.$$

Dividiendo el numerador y el denominador por a_0 (suponemos que $a_0\neq 0$), transformamos la ecuación obtenida en la que sigue:

$$y(t)=\frac{a_0^{-1}}{1-a_0^{-1}(-a_1 D-a_2 D^2-\ldots-a_n D^n)}\,x(t)\,.$$

Escribiendo $a_0^{-1}=S$ y $-a_1D-a_2D^2-\ldots-a_nD^n=R$ tenemos la fórmula de regulación [5.9].

El esquema de bloques que corresponde a esta ecuación diferencial es idéntico al esquema de la figura 49, en el que el operador del sistema regulado es $S=a_0^{-1}$, y el operador del regulador es

[7] Esto también puede demostrarse sobre un operador conjunto T^{-1}. Descomponemos el operador T^{-1} de manera arbitraria en dos componentes, por lo que $T^{-1}=A+B$. La transformación $y=Tx$ es entonces $y=(A+B)^{-1}x$, o sea,

$$y=\frac{1}{A+B}\,x\,.$$

Multiplicando numerador y denominador del segundo miembro de esta ecuación por A^{-1}, tenemos

$$y=\frac{A^{-1}}{1+A^{-1}B}\,x\,.$$

Sustituyendo $S=A^{-1}$ y $R=-B$, obtenemos la fórmula fundamental de la regulación [5.9].

$R=-(a_1D+a_2D^2+\ldots+a_nD^n)$. El sistema regulado se compone de un solo elemento en el cual se efectúa la transformación proporcional $a^{-1}=\frac{1}{a_0}$. En cambio la transformación que se efectúa en el

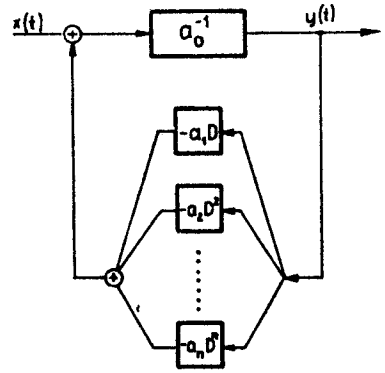


FIG. 50

regulador es la suma de n transformaciones. El regulador entonces es equivalente al sistema de n reguladores acoplados en paralelo, como se ha representado en la figura 50. En cada uno de estos re-

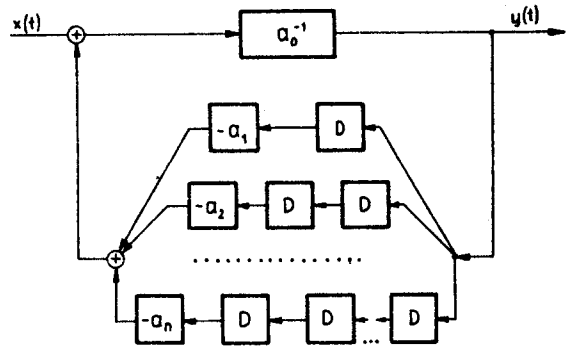


FIG. 51

guladores tiene lugar la transformación tipo $-a_rD^r$, es decir una transformación proporcional y r diferenciaciones ($r=1, 2, \ldots, n$). A su vez estos reguladores pueden descomponerse en un número conveniente de reguladores elementales acoplados en serie (Fig. 51).

En cada uno de estos acoplamientos en serie aparece una transformación proporcional $-a_r$ y r-tuple transformación que consiste en la diferenciación ($r=1, 2, \ldots, n$).

De manera parecida pero algo más complicada, se puede representar la fórmula [5.10], es decir la solución de la ecuación diferencia-diferencial [5.6]. Esto nos permite descifrar la estructura del acoplamiento de los elementos de los que se compone el sistema, y la separación de entre ellos de los elementos del sistema regulado y los elementos del regulador. Es más, cada ecuación lineal diferencia-diferencial (y a su vez, también la ecuación diferencial y la ecuación de diferencias finitas) de coeficientes constantes, pueden interpretarse cibernéticamente por medio de esquemas de bloques. Cada una de estas ecuaciones puede ser considerada como una descripción de ciertos procesos de regulación. Esto tiene importancia en la práctica, puesto que a base de esquemas de bloques como los de las figuras 50 y 51, se pueden construir modelos (eléctricos, p. ej.) o máquinas analógicas que sirven para resolver la ecuación diferencia-diferencial. De esta manera se pueden construir máquinas (llamadas *analógicas* o *simuladoras*) para investigar las reacciones de diferentes sistemas de acoplamiento.

La ecuación de reacción del sistema [5.6] está expresada por medio de tres operadores elementales: el operador k (que aparece bajo la forma de los coeficientes a_{rs}), el operador D y el operador E^{Θ}. Se puede expresar esta ecuación por medio de dos operadores elementales, a saber, el operador de la proporcionalidad k (en forma del coeficiente a_{rs}) y el operador de la diferenciación D. Considerando la relación que existe entre el operador E^{Θ} y el operador D, determinada por la fórmula [5.2], en lugar de E^{Θ}, se puede escribir $e^{\Theta D}$.

Por lo tanto, la ecuación [5.6] se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} D^r e^{\Theta s D}\right) y(t) = x(t)\,. \qquad [5.11]$$

También se puede representar (escribiendo $e^{\Theta s D}$ en vez de $E^{\Theta s}$), la solución [5.8] de la ecuación de reacción del sistema en los términos de la fórmula de la regulación [5.10]. Esta forma de anotar

la ecuación de reacción del sistema últimamente mencionada, es especialmente adecuada para su solución.

§ 2. Solución de la ecuación de reacción del sistema

Discutamos ahora el método de solución de la ecuación diferencia-diferencial [5.11] por medio de la cual hemos formulado la teoría general de los sistemas de regulación. Distinguimos por lo pronto dos casos de esta ecuación: 1) la ecuación es homogénea, o sea $x(t)=0$ para todos los valores t; 2) la ecuación es heterogénea, o sea $x(t)\neq 0$ por lo menos para algunos valores t.

Nos ocuparemos primero del caso en el que la ecuación es homogénea, es decir

$$\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} D^r e^{\Theta s D}\right) y(t) = 0\,. \qquad [5.12]$$

El método de solución de la ecuación homogénea diferencia-diferencial de coeficientes constantes, es el mismo que el utilizado para resolver la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes que hemos aplicado anteriormente en el caso simple, cuando la ecuación diferencial es de primer grado, o sea al resolver la ecuación [4.6] en el capítulo IV.

Suponemos que la solución tiene la forma de la función exponencial $y(t)=e^{\lambda t}$ y lo comprobamos sutituyendo en la ecuación [5.12]. Considerando que $D^r e^{\lambda t} = \lambda^r e^{\lambda t}$, tenemos

$$\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} \lambda^r e^{\Theta s \lambda}\right) e^{\lambda t} = 0$$

y puesto que $e^{\lambda t}\neq 0$,

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} \lambda^r e^{\Theta s \lambda} = 0\,. \qquad [5.13]$$

La función $y(t)=e^{\lambda t}$ es efectivamente la solución de la ecuación [5.12] si el parámetro λ cumple la ecuación [5.13]; o sea, si es la raíz de esta ecuación. La ecuación [5.13] se denomina ecuación característica de la ecuación diferencia-diferencial.

En el caso de que todos los procesos que se den en el sistema sean continuos, el primer miembro de la ecuación característica es un polinomio algebraico de n-ésimo grado y la ecuación tiene n raíces (contando p-entuple raíz, como p raíces). Sin embargo, en el caso general cuando también se dan procesos discretos que introducen en la ecuación característica los factores $e^{\Theta_s\lambda}$, el primer miembro de esta ecuación es un polinomio exponencial. El polinomio exponencial es una función analítica determinada sobre toda el área de la superficie asociada. Sobre este área $e^{\Theta_s\lambda}$ se produce la función periódica del período $2\pi i$. Esto da lugar a una infinidad de raíces características. El conjunto de las raíces características es calculable, puesto que por la teoría de las funciones analíticas sabemos que en una determinada área de cero las funciones analíticas se encuentran aisladas. Existen pues una serie de funciones $y_1=e^{\lambda_1 t}$, $y_2=e^{\lambda_2 t}$ ..., que constituyen la solución de la ecuación diferencia-diferencial. En principio, esta serie es infinita, a excepción del caso en el que todos $\Theta_s=0$; la ecuación se transforma en una simple ecuación diferencial, y el polinomio característico se convierte en un polinomio algebraico.

Por sustitución e inducción se puede también comprobar que cuando las funciones $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ ..., son la solución de la ecuación homogénea [5.12], también la suma de aquellas funciones es la solución de esta ecuación. Entonces la solución general de la ecuación homogénea diferencia-diferencial [5.12] tiene la forma siguiente:

$$y(t)=\sum_j K_j\, e^{\lambda_j t}\,.$$

En caso de que la raíz λ_j sea múltiple —digamos p-entuple— lo que también puede comprobarse por sustitución en el miembro de la función $e^{\lambda_j t}$, también las funciones $te^{\lambda_j t}$, $t^2e^{\lambda_j t}$, ... $t^{p-1}e^{\lambda_j t}$, serán soluciones de la ecuación [5.12] [8]. Así que la suma es $(K_1+K_2t+K_3t^2+\ldots K_pt^{p-1})\,e^{\lambda_j t}$ cumple también la ecuación y entre paréntesis tenemos un polinomio de grado menor que 1, *que la multiplicidad de la función;* en este caso $(P-1)$.

[8] Indiquemos el primer miembro de la ecuación característica [5.13] por $F(\lambda)$. Como ya sabemos, $F(\lambda)$ es la función analítica λ sobre el área de toda la superficie asociada. Si λ es la p-tuple raíz de la ecuación $F(\lambda)=0$, entonces

$$F(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)p\Phi(\lambda), \quad \text{donde} \quad \Phi(\lambda)\neq 0\,.$$

De donde resulta que $F'(\lambda_j)=F''(\lambda_j)=\ldots=F^{(p-1)}(\lambda_j)=0$.
Diferenciando la ecuación homogénea $F(\lambda)e^{\lambda t}=0$, obtenemos

$$F'(\lambda)e^{\lambda t}+F(\lambda)te^{\lambda t}=0$$
$$F''(\lambda)e^{\lambda t}+2F'(\lambda)te^{\lambda t}+F(\lambda)t^2e^{\lambda t}=0, \text{ etc.}$$

Si λ_j es la p-tuple raíz, tenemos

$$F(\lambda_j)e^{\lambda_j t}=F(\lambda_j)te^{\lambda_j t}=F(\lambda_j)t^2e^{\lambda_j t}=\ldots=$$
$$=F(\lambda_j)t^{p-1}e^{\lambda_j t}=0, \quad \text{así que} \quad e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ t^2e^{\lambda_j t}\ldots,\ t^{p-1}e^{\lambda_j t}$$

son las soluciones de la ecuación homogénea [5.12].

Considerando entonces la posibilidad de que haya raíces múltiples escribimos la solución general en la forma siguiente:

$$y(t)=\sum_j q_j(t)\, e^{\lambda_j t}\,, \qquad [5.14]$$

donde $q_j(t)$ es un polinomio de grado menor que 1 *que la multiplicidad de la raíz característica,* y $q_j(t)$ es un valor constante si esta raíz es simple.

Determinamos los coeficientes $q_j(t)$ a partir de las condiciones primitivas del problema. Si, como sucede generalmente, el número de coeficientes calculables es infinito, es necesario un número infinito de condiciones primitivas que viene dado de manera *implícita* si conocemos el transcurso de la función en el intervalo primitivo desde $t=0$ hasta $t=\max\Theta_s$, que corresponden al adelantamiento máximo.

A la vez nos ocuparemos de la resolución de la ecuación diferencia-diferencial heterogénea [5.11]. La solución puede presentarse como la suma de dos funciones $y(t)=\bar{y}(t)+\hat{y}(t)$, la primera de las cuales es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, obtenida tomando en el segundo miembro $x(t)=0$ (llamada ecuación reducida) y la otra es la solución arbitraria particular de la ecuación heterogénea.

Para verificarlo sustituimos la suma $\bar{y}(t)+\hat{y}(t)$ por la ecuación heterogénea [5.11]. Después de haberla ordenado tenemos

$$\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}\,D^r\,e^{\Theta_s D}\right)\bar{y}(t)+\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}a_{rs}\,D^r\,e^{\Theta_s D}\right)\hat{y}(t)=x(t)\,.$$

Puesto que $\bar{y}(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea, el primer componente es igual a cero. En cambio el segundo componente es igual a $x(t)$, puesto que $\hat{y}(t)$ es la solución particular de la ecuación heterogénea. Así que $\bar{y}(t)+\hat{y}(t)$ cumple la ecuación heterogénea [5.11].

La solución general de la ecuación [5.11] se puede entonces representar de la siguiente forma:

$$y(t)=\sum q_j(t)\, e^{\lambda_j t}+\hat{y}(t)\,, \qquad [5.15]$$

donde $\hat{y}(t)$ es la solución particular de la ecuación heterogénea.

La solución particular $y(t)$ es fácil de encontrar por el método de operadores y viene dada por la fórmula [5.8]. Introduciendo el operador $e^{\Theta,D}$ en vez del operador E^{Θ}, tenemos

$$\hat{y}(t)=\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs}\, D^r\, e^{\Theta,D}\right)^{-1} x(t)\,. \qquad [5.16]$$

vemos que esta expresión es la solución de la ecuación diferencia-diferencial [5.11] e introduciéndola en esta ecuación, obtenemos $x(t)=x(t)$.

Como sabemos, la expresión [5.16] se puede trasladar a la fórmula fundamental de la teoría de la regulación [5.9]. La podemos, pues, expresar de la forma siguiente:

$$\hat{y}(t)=\frac{S}{1-SR}\,x(t)\,, \qquad [5.17]$$

en la que $S=(\sum_{\rho}\sum_{\sigma} a_{\rho\sigma}\, D^{\rho}\, e^{\Theta\sigma})^{-1}$ y $R=-\sum_{r\neq\rho}\sum_{s\neq\sigma} a_{rs}\, D^r\, e^{\Theta,D}$.

En cambio, la solución general de la ecuación de reacción del sistema se puede expresar como sigue:

$$y(t)=\sum q_j(t)\, e^{\lambda_j t}+\frac{S}{1-SR}\,x(t)\,. \qquad [5.18]$$

Esta solución determina el comportamiento de la salida del sistema; o sea, la función de la salida $y(t)$, si la entrada del sistema está sometida a una "alimentación" que corresponde a la función de la entrada $x(t)$.

Como se deduce de las fórmulas [5.15] y [5.18], este comportamiento viene dado por la suma de dos componentes. El segundo componente que aparece en la fórmula, o sea, la solución particular $\hat{y}(t)=\frac{S}{1-SR}\,x(t)$ depende de la función de la entrada $x(t)$; es decir, del transcurso en el tiempo de los estados de la entrada (alimentación) del sistema. Lo denominaremos *componente de alimentación*[9]. En cambio, el primer componente —la solución de la ecuación homogénea— es independiente de los estados de la entrada del sistema, de sus "características propias". Estas "características propias" se expresan por las raíces características λ_j. A este componente lo llamaremos *componente propio.*

Las raíces características λ_j pueden ser reales o asociadas, y aparecen siempre en parejas acopladas, puesto que los coeficientes a_{rs} son por definición reales. Si las raíces son reales, son posibles los tres casos siguientes:

1) Todas las raíces son reales y negativas; es decir, $\lambda_j<0$ para todas las j. Entonces el componente propio de la solución tiende a cero, cuando $t\longrightarrow\infty$. Dicho componente desaparece con el tiempo; por lo tanto, en este caso lo llamamos componente de *transición.* Así, pues, la solución general $y(t)\longrightarrow\hat{y}(t)$; o sea, al componente de alimentación determinado por la fórmula fundamental de la regulación. El sistema es entonces estable, se aproxima a un *estado de equilibrio* determinado. El estado de equilibrio varía en el tiempo cuando varía el valor de la alimentación $x(t)$ (hablamos entonces de *equilibrio móvil),* y es invariable cuando la alimentación es un valor constante; es decir, $x(t)=$const. (hablamos entonces de *equilibrio estacionario).* La convergencia al estado de equilibrio es monótona.

Si regulamos el sistema habrá un valor dado (la norma) $z(t)$, que deberá ser cumplido por el estado de la salida del sistema. En el caso de la regulación controlada dicha norma será el resultado del criterio de control estipulado. Si $\hat{y}(t)=z(t)$, entonces el sistema funciona conforme a la norma dada; en cambio, si $\hat{y}(t)\neq z(t)$ existe un error fijo sistemático del sistema $\epsilon(t)=\hat{y}(t)-z(t)$. Un error de este

[9] En la bibliografía sobre el tema se le denomina "*componente forzado*"

tipo, como sabemos, se puede eliminar mejorando los elementos del sistema que funcionan como reguladores, o cambiando adecuadamente la alimentación; por ejemplo, la función de la entrada $x(t)$.

2) Una o más de las raíces reales $\lambda_j > 0$. Entonces el componente de la solución general [5.15] o [5.18] tiende a ∞, cuanto $t \longrightarrow \infty$. En tal caso, el sistema es *inestable;* el estado de la salida $y(t)$ cada vez se aleja más del equilibrio determinado por el componente de alimentación. Las "características propias" del sistema, cada vez perturban más el efecto causado por la alimentación $x(t)$, el sistema "se escapa" cada vez más de la influencia de la alimentación. En este caso el componente propio $y(t)$ determina la *tendencia* del desarrollo de la salida del sistema. Dicha tendencia no depende de la alimentación $x(t)$ y es el resultado de las "características propias" del sistema; expresa su *ley interna del movimiento* [10].

3) Todas las raíces $\lambda_j = 0$. Entonces el componente propio de la solución posee valor arbitrario y tenemos $y(t) =$ valor arbitrario $+ \hat{y}(t)$. Decimos entonces que el sistema está en el *límite de la estabilidad,* se le puede dar una desviación arbitraria del estado de equilibrio $\hat{y}(t)$. Esta desviación ni disminuirá ni aumentará. Decimos entonces que cada estado del sistema es el estado de equilibrio.

Veamos qué sucede cuando la ecuación característica tiene raíces asociadas. Sea $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j$, entonces la función $e^{\lambda_j t}$ se puede expresar:

$$e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t}\, e^{i\beta_j t}\,.$$

Sirviéndonos de la conocida fórmula de Euler $e^{it\omega} = \cos w + i \operatorname{sen} w$, escribimos

$$e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t}\ (\cos\ \beta_j t + i\ \operatorname{sen}\ \beta_j t). \qquad [5.19]$$

De modo que en el caso de que la raíz característica esté asociada, el componente propio $\bar{y}(t)$ de la solución de la ecuación de reacción del sistema, contiene un elemento periódico. El transcurso en el tiempo del estado de salida $y(t)$ es entonces oscilatorio. El tipo de oscilación depende del signo de la parte real de la raíz λ_j; es decir, del signo α_j, que determina la amplitud de la oscilación. Si $\alpha_j < 0$, entonces la oscilación está amortiguada y al cabo de cierto tiempo desaparece. Si $\alpha_j = 0$, la oscilación es constante; es decir, que su amplitud es invariable, si $\alpha_j > 0$, la amplitud de la oscilación crece indefinidamente.

Puesto que los números reales pueden ser considerados como un caso particular de los números asociados, el resultado puede resumirse como sigue. Consideramos las raíces características como números asociados

$$\lambda_j = re\ \lambda_j + im\ \lambda_j$$

donde $re\ \lambda_j$ significa la parte real e $im\ \lambda_j$ la parte asociada. La parte real decide la estabilidad del sistema; a saber: el sistema es estable si $re\ \lambda_j < 0$ para todos los λ_j; está en el límite de la estabilidad si $re\ \lambda_j = 0$ para todos los λ_j; es inestable si $re\ \lambda_j > 0$ para uno o más λ_j. La parte asociada decide que el transcurso en el tiempo del estado de la salida del sistema sea monótono u oscilatorio. El transcurso es monótono si $im\ \lambda_j = 0$ para todos λ_j; es oscilatorio si $im\ \lambda_j \neq 0$ para uno o más λ_j.

Merece especial atención este caso cuando hay una o más raíces reales positivas y una o más raíces imaginarias de forma que $\lambda_j < 0$. Las raíces reales positivas determinan el curso del desarrollo del estado de la salida del sistema, y las raíces asociadas determinan las oscilaciones en el transcurso del estado de la salida del sistema. Puesto que el componente propio de la solución es la suma de expresiones del tipo $q_j(t)\, e^{\lambda_j t}$ la dirección y las oscilaciones se superponen y tiene lugar, como decimos, la superposición. Sin embargo, en vista de que $re\ \lambda_j < 0$, estas oscilaciones desaparecen con el tiempo y las desviaciones de la dirección se anulan paulatinamente. En este caso decimos que tiene lugar el *autocontrol del sistema* [11]. Las "características internas" del sistema determinan su "ley interna del movimiento" que se expresa en la dirección del transcurso de

[10] La expresión "ley del movimiento" la usa Marx para determinar la regularidad del desarrollo que resulta de las "características propias" del sistema capitalista. Vea *Kapital,* t. I, Varsovia 1950, pág. 6. La expresión generalizada de la "ley interna del movimiento" del sistema la introduce O. Lange, *Calosc i rozwój w swietle cybernetyki,* Varsovia 1962, págs. 37 y 45-46.

[11] Sobre el autocontrol del sistema, véase O. Lange, *Calosc i rozwój w swietle cybernetyki,* pág. 74.

sus estados de la salida, típica para este sistema. Las mismas características internas determinan también la propiedad de la autoeliminación de las desviaciones oscilatorias de la tendencia.

Es interesante también el caso del sistema que se encuentra en el *límite del autocontrol*. Sucede esto cuando una parte de las raíces características es real y positiva, otra parte es imaginaria y $re\,\lambda_j \leqslant 0$, de donde $re\,\lambda_j = 0$ para, por lo menos, uno de ellos. Entonces se da la superposición de la tendencia y la oscilación de amplitud constante. Como veremos, un fenómeno similar fundamenta el modelo de la teoría del ciclo coyuntural en la economía capitalista (o por lo menos para una fase de su desarrollo).

Sobre la estabilidad, monotonía u oscilación de un sistema, decide el componente propio de la ecuación de reacción del sistema. En cambio, el componente de alimentación determina el estado de equilibrio del sistema. Ambos componentes no son, sin embargo, independientes entre sí, puesto que hay cierta relación entre las raíces características λ_j que aparecen en el componente propio y los operadores S y R que aparecen en el componente de alimentación. La relación exige, puesto que el componente de alimentación $\hat{y}(t)$ expresa la reacción del sistema a la alimentación (estado de la entrada) $x(t)$. Distintos sistemas reaccionan de manera diferente a la misma alimentación, puesto que la reacción depende de las propiedades del sistema, o sea, de sus "características propias". De las mismas "características propias" dependen también las raíces características y, a la vez, el componente propio de la solución de la ecuación de reacción del sistema.

La relación entre los operadores S y R y las raíces características λ_j la hallamos de la siguiente manera. Hemos visto más arriba que la fórmula fundamental de la teoría de la regulación puede ser representada en forma de una serie infinita [12].

$$y(t) = [1 + (SR) + (SR)^2 + \ldots]\, Sx(t)\,.$$

Esta serie expresa la función de la salida $y(t)$ en relación con la función de la entrada $x(t)$. La misma relación expresa la solución

[12] Véase capítulo 3, § 3.

de la ecuación de reacción del sistema, expresada en la forma que le hemos dado en la fórmula [5.18]; a saber:

$$y(t) = \sum_j q_j(t)\, e^{\lambda_j t} + \frac{S}{1 - SR}\, x(t)\,.$$

La primera expresión es convergente al estado de equilibrio $y(t) = \dfrac{S}{1-SR}\, x(t)$, si $|SR| < 1$, donde $|SR|$ = máximo absoluto $\left|\dfrac{\hat{y}(t)}{y(t)}\right|$ en el intervalo considerado t. La segunda expresión al ser $t \longrightarrow \infty$ es convergente al mismo estado de equilibrio si para todas las raíces características $re\,\lambda_j < 0$. Así que la condición de la estabilidad $re\,\lambda_j < 0$ es equivalente a la condición de estabilidad anteriormente considerada [13] $|SR| < 1$, donde $|SR|$ está determinado como límite superior del valor absoluto de la razón de transformación $\dfrac{\hat{y}(t)}{y(t)}$ en el intervalo (t_0, ∞) [14].

Al valor absoluto así determinado corresponde

$$SR = \rho_j = \frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1} \qquad (j = 1, 2, \ldots)\,.$$

Esta es la transformación que cambia un circuito de radio 1 en la superficie asociada ρ al semiplano asociado izquierdo λ, y viceversa. Posee la propiedad de que entonces y solamente cuando $re\,\lambda_j < 0$ [15]. De esta manera, a cada raíz λ_j de la parte real negativa le corresponde un valor absoluto $|\rho_j| = |SR| < 1$. El valor de la

[13] Véase capítulo 3.

[14] Como se ha indicado más arriba, en el capítulo 3, para los operadores lineales continuos siempre existe el límite superior.

[15] Escribimos $\lambda = \alpha + i\beta$. Entonces

$$\rho = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{(\alpha+1)+i\beta}{(\alpha-1)+i\beta}$$

y

$$|\rho|^2 = \frac{|(\alpha+1)+i\beta|^2}{|(\alpha-1)+i\beta|^2} = \frac{(\alpha+1)^2+\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2}\,.$$

Si $|\rho| < 1$, entonces también $|\rho^2| < 1$, y viceversa.
Entonces $(\alpha+1)^2+\beta^2 < (\alpha-1)^2+\beta^2$, de donde $2\alpha < -2\alpha$, o sea, $\alpha < 0$.

estabilidad del sistema que resulta de la solución de la ecuación de reacción del sistema es idéntico a la condición de la estabilidad resultante del desarrollo en una serie infinita del multiplicador de la retroacción $\frac{1}{1-SR}=1+(SR)+(SR)^2+\ldots$, que aparece en la fórmula fundamental de la teoría de la regulación.

§ 3. Ejemplo: el modelo del ciclo de coyuntura de Michal Kalecki

Ilustremos la ecuación de reacción del sistema y su solución con el ejemplo del modelo del funcionamiento del ciclo coyuntural en la economía capitalista, creado por Michal Kalecki [16]. Kalecki considera una serie de magnitudes macroeconómicas determinadas en un momento t, a saber: cantidad del capital real (bienes de inversión) $K(t)$, cantidad de bienes de inversión producidos por encima de la demanda para la renovación; o sea, la producción neta de los bienes de inversión $L(t)$, cuantía de los volúmenes de inversión $B(t)$, el ingreso nacional $Y(t)$, el consumo global $C(t)$ y las inversiones globales netas $I(t)$.

Entre estas magnitudes se dan relaciones que se expresan en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dK(t)}{dt}=L(t)\,, \qquad [5.20]$$

[16] El modelo de Michal Kalecki, que ha alcanzado fama mundial, fue publicado por vez primera bajo el título *Próba teorii koniunktury*, Varsovia 1933 (reimpreso parcialmente en M. Kalecki, *Prace z teorii koniunktury* 1933-1939, Varsovia 1962). Más tarde ha aparecido en diversas versiones, de las cuales mencionamos: *A Macrodynamic Theory of Bussines Cycles*, "Econometrica" 1935; *Studies in Economic Dynamics*, Londres 1954 (en polaco, *Teoría dynamiki gospodarczej*, Varsovia 1958), una descripción más precisa, se encuentra en R. G. D. Allen, *Mathematical Economics*, Londres-Nueva York 1957, págs. 251-261 y 286-288) (edición polaca *Ekonomia matematyczna*, Varsovia 1961, págs. 265-294). De manera simplificada presentan y discuten el modelo O. Lange, *Michala Kaleckiego model cyklu koniunkturalnego* y *Nowa wersja modelu Kaleckiego*, en O. Lange, *Pisma ekonomiczne i spoleczne*, Varsovia 1961, y M. H. Chiksy, *Feedback and Stability*, en *Operations Research and Systems Engineering*, redactado por C. D. Flagle, W. H. Huggin y R. H. Roy, Baltimore 1960. Del modelo de Kalecki trata también A. Tustin, *The mechanism of Economic Systems*, Londres 1953, págs. 12-14.

o sea, el aumento de la cantidad del capital real es igual a la producción neta de los bienes de inversión

$$L(t+\Theta)=B(t)\,, \qquad [5.21]$$

o sea, la producción neta de los bienes de inversión en el momento $t+\Theta$ es igual a la dimensión de las decisiones de inversión tomadas en el momento t. Entre la decisión de inversión y la producción de los bienes de inversión, transcurre entonces el período Θ considerado como constante.

$$B(t)=a[Y(t)-C(t)]-bK(t), \text{ donde } a>0,\ b>0\,. \qquad [5.22]$$

La dimensión de las decisiones de inversión es proporcional a la parte no consumida de ingreso nacional; o sea, a la acumulación global (ahorro). Kalecki considera que solamente acumulan los capitalistas, quienes a la vez toman las decisiones de inversión. Pero también en el caso de que además de los capitalistas los demás acumulen sus ahorros y los pongan a disposición de los capitalistas (p. ej., por medio del crédito), influyen en las decisiones de inversión. La dimensión de la inversión depende también de la cantidad de capital real existente y es también menor cuanto mayor es la cantidad. Esto se debe a que el ingreso nacional y el consumo dado, la rentabilidad de las inversiones, es tanto menor cuanto mayor es el volumen del capital real

$$Y(t)=C(t)+I(t)\,, \qquad [5.23]$$

o sea, el ingreso nacional es la suma del consumo y de las inversiones

$$C(t)=cY(t)\,, \text{ donde } 0<c<1\,. \qquad [5.24]$$

El consumo global es proporcional al ingreso nacional; c es el coeficiente de consumo

$$I(t)=\frac{1}{\Theta}\int_{t-\Theta}^{t} B(t)dt\,, \qquad [5.25]$$

o sea, las inversiones globales en el momento t son iguales al valor medio de todas las decisiones de inversión tomadas en el período

$[t-\Theta, t]$. En el momento t, pues, se realizan todas las inversiones decididas en este período, o sea, $\int_{t-\Theta}^{t} B(t)$; sin embargo, solamente está terminada $\frac{1}{\Theta}$ parte de esta cantidad.

Para los fines de nuestro análisis será cómodo presentar estas ecuaciones en forma operatoria. Tenemos entonces

$$DK(t)=L(t) \qquad [5.26]$$
$$E^{\Theta} L(t)=B(t) \qquad [5.27]$$
$$B(t)=a[Y(t)-C(t)]-bK(t) \qquad [5.28]$$
$$Y(t)=C(t)+I(t) \qquad [5.29]$$
$$C(t)=cY(t) \qquad [5.30]$$
$$I(t)=\frac{1}{\Theta} D^{-1}(1-E^{-\Theta})\, B(t)\,. \qquad [5.31]^{17}$$

Estas ecuaciones determinan el sistema lineal de los sistemas acoplados cuyo diagrama de bloques puede verse en la figura 52.

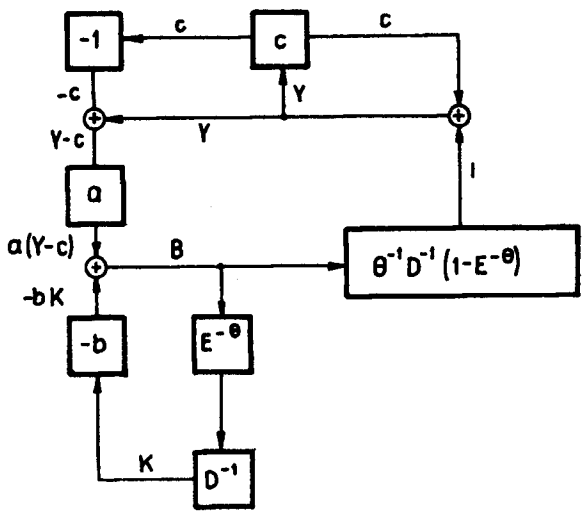


FIG. 52

[17] En la ecuación [5.31] aparece una integral definida $\int_{t-\Theta}^{t} B(t)\,dt = \int B(t)dt - \int B(t-\Theta)\,dt$. En forma operatorial la expresamos así:
$D^{-1}B(t)-D^{-1}E^{-\Theta}B(t)=D^{-1}(1-E^{-\Theta})B(t)$.

Como se ve en la figura, en este esquema aparecen tres acoplamientos de retroacción. Uno es el acoplamiento que une los elementos determinados por los operadores E^{Θ}, D^{-1}, $-b$; al que corresponden las ecuaciones [5.26], [5.27] y [5.28]. El segundo es el acoplamiento que une los elementos determinados por los operadores 1, 1, c; y se expresa por las ecuaciones [5.29], [5.30]. El tercero es el acoplamiento que une los operadores $\frac{1}{\Theta} D^{-1}(1-E^{-\Theta})$, 1, c, -1, a, al que corresponden las ecuaciones [5.31], primer componente del segundo miembro de la ecuación [5.28] y el segundo del segundo miembro de la ecuación [5.30]. Como puede observarse, en el sistema se dan las siguientes transformaciones: la transformación proporcional (los operadores 1, a, $-b$, c, $\frac{1}{\Theta}$), diferenciación (operador D), integración (operador D^{-1}), adelantamiento (operador E^{Θ}) y retrasamiento (operador $E^{-\Theta}$).

El sistema de las ecuaciones [5.26]–[5.31] puede expresarse por medio de una sola ecuación. Uniendo las ecuaciones [5.26], [5.27] y [5.28], obtenemos

$$DE^{\Theta} K(t)=a[Y(t)-C(t)]-bK(t)\,.$$

Teniendo en cuenta la ecuación [5.30] escribimos

$$DE^{\Theta} K(t)=a(1-c)\,Y(t)-bK(t)\,.$$

Uniendo las ecuaciones [5.29] y [5.30] obtenemos

$$Y(t)=\frac{1}{1-c} I(t)\,.$$

Si introducimos este resultado en la ecuación anteriormente obtenida, tendremos

$$DE^{\Theta} K(t)=aI(t)-bK(t)\,.$$

Sustituyenedo por $I(t)$ en el segundo miembro de la ecuación [5.25] encontramos

$$DE^{\Theta} K(t)=a\frac{1}{\Theta} D^{-1}(1-E^{-\Theta})\,B(t)-bK(t)\,.$$

Partiendo de las ecuaciones [5.20] y [5.21] tenemos $B(t)=E^{\Theta}DK(t)$.

Teniendo en cuenta esta relación obtenemos

$$DE^{\Theta} K(t)=a\frac{1}{\Theta} D^{-1}(1-E^{-\Theta}) E^{\Theta} DK(t)-bK(t).$$

De donde, finalmente,

$$DE^{\Theta} K(t)=-\frac{a}{\Theta}(E^{\Theta}-1) K(t)-bK(t). \qquad [5.32]$$

El resultado obtenido es una ecuación lineal diferencia-diferencial de coeficientes constantes. Puesto que el intervalo entre la decisión de inversión y la producción de los bienes de inversión Θ es un valor constante, el período Θ se puede tomar como unidad de tiempo. Si $\Theta=1$, aprovechando además la relación $E=e^{D}$, formulamos la ecuación diferencia-diferencial como sigue:

$$[De^{D}+a(1-e^{D})]^{K(t)}+bK(t)=0$$

o

$$[(D-a) e^{D}+a+b] K(t)=0. \qquad [5.33]$$

El operador $(D-a) e^{D}+a+b$, que aparece en el primer miembro de la ecuación obtenida es el *operador conjunto* del sistema determinado por las ecuaciones [5.26]–[5.31]. La ecuación diferencia-diferencial [5.33] es la *ecuación de reacción* de este sistema y corresponde a la transformación $T^{-1} y(t)=x(t)$ arriba descrita. La función de salida del sistema es $K(t)$ y representa el transcurso de los cambios del volumen de capital real. Se pueden tomar otras magnitudes como la salida del sistema, por ejemplo, el ingreso nacional $Y(t)$. De las relaciones arriba establecidas, obtenemos

$$a(1-c) Y(t)=De^{D} K(t)+bK(t),$$

o sea,

$$Y(t)=\frac{D e^{D}+b}{a(1-c)} K(t).$$

El primer número de la ecuación [5.33] representa la función de entrada del sistema $x(t)$. En el caso dado tenemos, sin embargo, igualdad idéntica $x(t)=0$ y la ecuación es homogénea. Lo que significa que el sistema no recibe la alimentación de fuera; el transcurso en el tiempo de su estado de salida $K(t)$ o $Y(t)$ depende exclusivamente de las "características propias" del sistema. El diagrama de bloques de este sistema se representa en la figura 53.

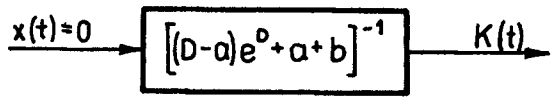


FIG. 53

Hallamos la solución de la ecuación [5.33] considerando que tiene la forma $K(t)=K_0 e^{\lambda t}$, donde $K_0=K(0)$ indica el volumen de capital real en el momento inicial. Introduciendo esta función en la ecuación [5.33] obtenemos la ecuación característica

$$(\lambda-a) e^{\lambda}+a+b=0. \qquad [5.34]$$

Como se ve, el primer miembro de la ecuación característica es un polinomio potencial.

Las raíces reales del polinomio potencial [5.34] y la condición de su existencia pueden determinarse gráficamente. Con este fin escribimos la ecuación característica [5.34] en la forma siguiente.

$$(\lambda-a) e^{\lambda}=-(a+b).$$

Los dos miembros de esta ecuación se representan gráficamente en la figura 54. El primer miembro es la función de la variable λ representada en el gráfico por la curva de la ecuación $f(\lambda)=(\lambda-a) e^{\lambda}$. El segundo miembro está representado por la recta horizontal de la eecuación $y=-(a+b)$. Los puntos en los que la curva $f(\lambda)$ se corta con la recta y, determinan las raíces reales.

La función $f(\lambda)$ tiene las siguientes propiedades. Es una función creciente cuya derivada es $f'(\lambda)=(1+\lambda-a)e^{\lambda}$. La función es creciente si $\lambda>a-1$ y decreciente si $\lambda<a-1$. En el punto que corresponde al valor $\lambda=a-1$, la función alcanza su mínimo. Si $\lambda\longrightarrow-\infty$, entonces $f(\lambda)\longrightarrow 0$, en cambio, si $\lambda\longrightarrow+\infty$, entonces $f(\lambda)\longrightarrow\infty$ [18]. El mínimo de la función es $-e^{a-1}$ y el punto que co-

[18] Escribiendo $f(\lambda)=\lambda e^{\lambda}-ae^{\lambda}$, tenemos que cuando $\lambda\longrightarrow-\infty$ entonces $ae^{\lambda}\longrightarrow 0$. Puesto que e^{λ} varía más rápido que λ, entonces $\lambda e^{\lambda}\longrightarrow e^{\lambda}\longrightarrow 0$, cuando $\lambda\longrightarrow-\infty$.

responde a $\lambda=0$ la función tiene valor $-a$. La función tiene el valor cero para $\lambda=a$. Estas propiedades son visibles en las figuras 54a y 54b. En la figura 54a se consideró que $a<1$, entonces el mínimo de la función se encuentra al lado izquierdo del eje de las ordenadas. Si $a>1$, entonces el mínimo cae al lado derecho de las ordenadas, lo que está representado en lafigura 54b. La forma general de la función es la misma.

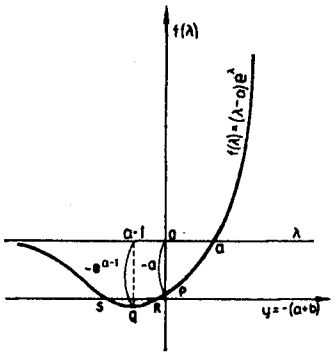


FIG. 54a

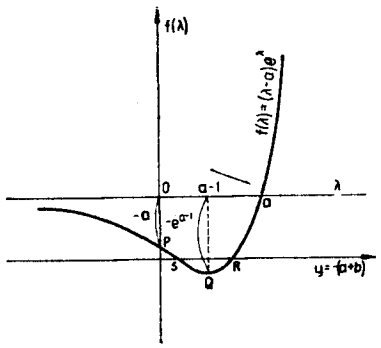


FIG. 54b

Suponiendo que $a>0$ y $b>0$, la recta horizontal $y=-(a+b)$ se encuentra por debajo del eje de las abscisas y aún por debajo del punto P que corresponde al valor de la ordenada $-a$. En vista de esto, si la recta corta la curva que representa gráficamente la función $f(\lambda)$, la corta en dos puntos, como puede verse en las figuras 54a y 54b (puntos R y S). Si $a<1$, la intersección estará entonces a la izquierda del eje de las ordenadas; o sea, en los valores negativos de λ; como se ve en la figura 54a. En cambio, si $a>1$, los puntos de intersección se encuentran a la derecha del eje de las ordenadas; o sea, en los valores positivos λ (véase la fig. 54b). La condición necesaria para que la recta se corte con la representación gráfica de la función $f(\lambda)$ es $a+b<e^{a-1}$. En el límite, $a+b=e^{a-1}$, la recta es tangente a la representación gráfica de la función $f(\lambda)$ en el punto Q. La tangencia tiene lugar a ambos lados del eje de las ordenadas, dependiendo esto de si $a<1$ o $a>1$; si $a=1$, el punto de tangencia se encuentra sobre el eje de las ordenadas.

Si $a+b>e^{a-1}$ la recta no corta la representación gráfica de la función $f(\lambda)$, la ecuación característica no tiene entonces raíces reales.

Resulta, pues, que las raíces características reales existen si $a+b\leqslant e^{a-1}$, y serán dos si hay desigualdad, y una (doble) en el caso de que haya igualdad. Las raíces son negativas si $a<1$, positivas si $a>1$; en el caso particular de $a=1$ existe una raíz (doble) que es igual a cero.

Encontramos las raíces imaginarias de la ecuación característica [5.34] considerando $\lambda=\alpha+i\beta$ e introduciéndolo en la ecuación. Tenemos entonces

$$(\alpha-a+i\beta)\,e^{\alpha+i\beta}+a+b=0$$

o

$$(\alpha-a+i\beta)\,e^{\alpha}=-(a+b)\,e^{-i\beta}\,.$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Euler $e^{-i\beta}=\cos\beta-i\,\text{sen}\,\beta$, escribimos

$$(\alpha-a+i\beta)\,e^{\alpha}=-(a+b)\,(\cos\beta-i\,\text{sen}\,\beta).$$

La parte real del primer miembro de la ecuación tiene que ser igual a la parte real del segundo miembro y la parte asociada igual a la parte asociada. De modo que han de emplearse las siguientes igualdades:

$$(\alpha-a)\,e^{\alpha}=-(a+b)\cos\beta \qquad [5.35a]$$

$$\beta\,e^{\alpha}=(a+b)\,\text{sen}\,\beta\,. \qquad [5.35b]$$

De la igualdad [5.35b] obtenemos

$$e^{\alpha}=(a+b)\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\,.$$

Y sustituyendo en [5.35a] tenemos

$$(\alpha-a)\,(a+b)\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}=-(a+b)\cos\beta$$

o sea

$$(\alpha-a)\,\text{tg}\,\beta=-\beta\,.$$

De donde

$$\text{tg}\,\beta=\frac{1}{a-\alpha}\,\beta\,. \qquad [5.36]$$

Puesto que α y β son reales, la ecuación [5.36] se puede resolver gráficamente. En la figura 55 se ha representado la gráfica de la función $\operatorname{tg}\beta$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ y trazado la curva $y=\frac{1}{a-\alpha}\beta$. Los puntos de intersección de esta recta con la gráfica de la función $\operatorname{tg}\beta$ determinan las raíces de la ecuación [5.36]. El punto de intersección es siempre el origen del sistema de las coordenadas 0. Esta intersección da el resultado $\beta=0$, correspondiente a la raíz real (si existe). Las raíces imaginarias están determinadas por las intersecciones en los puntos correspondientes a $\beta\neq 0$. La existencia de estas intersecciones depende de la oblicuidad de la recta que es igual a $\frac{1}{a-\alpha}$. La trayectoria de la curva que constituye la gráfica de la función $\operatorname{tg}\beta$ es $\frac{d\operatorname{tg}\beta}{d\beta}=1+\operatorname{tg}^2\beta$ y es mínimo en el punto 0, donde equivale a 1. Para que la recta corte la curva $\operatorname{tg}\beta$ en otros puntos, su inclinación tiene que ser mayor que la inclinación mínima de esta curva; o sea, $\frac{1}{a-\alpha}>1$.

En ese caso la recta corta la representación gráfica de la función $\operatorname{tg}\beta$ en dos puntos simétricos R y S que corresponden a las raíces imaginarias $\alpha+i\beta$ y $\alpha-i\beta$. En cambio, si $\frac{1}{a-\alpha}\leqslant 1$, al recta corta la curva solamente en el punto 0 y no tiene raíces imaginarias.

La condición de la existencia de las raíces imaginarias es $\frac{1}{a-\alpha}>1$, es decir, $a-1<\alpha<a$. Las consecuencias son muy interesantes. Si $a\geqslant 1$, entonces $\alpha>0$, las raíces imaginarias tienen la parte real positiva y se dan oscilaciones crecientes. Si $a<1$, entonces α puede (no necesariamente) ser negativa o igual a cero y las oscilaciones pueden ser decrecientes o de amplitud constante.

A este respecto hay cierta relación entre los valores α que determinan las variaciones de la amplitud de las oscilaciones y los valores β que determinan su frecuencia (o período). Como se ve en la figura 55, el valor β determinado por el punto de intersección R está situado dentro del intervalo abierto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y es tanto mayor cuanto mayor es el coeficiente de inclinación de la recta $\frac{1}{a-\alpha}$, o sea, cuanto menor es $a-\alpha$. De esto resulta que el período de las oscilaciones que es igual $T=\frac{2\pi}{\beta}$ no puede ser inferior a 4 unidades de tiempo (como unidad de tiempo hemos tomado Θ; es decir, el lapso de tiempo existente entre la producción de los bienes de inversión y la adopción de decisiones de inversión). El período T es tanto mayor cuanto menor es el valor α. Tomando $\alpha=0$ (o sea, en el caso de oscilaciones de amplitud constante) como criterio de la división, obtenemos cierto valor crítico β_0 y T_0. Resulta entonces que en el caso $\alpha>0$ (oscilaciones crecientes) $\beta>\beta_0$ y $T<T_0$, en cambio en el caso $\alpha<0$ (oscilaciones

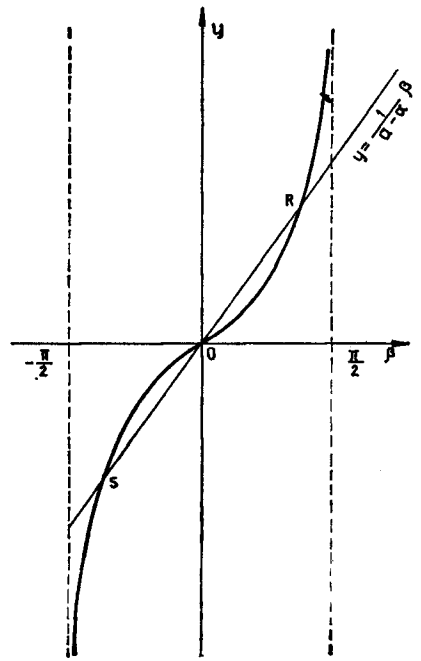


FIG. 55

decrecientes) $\beta < \beta_0$ y $T < T_0$. De modo que las oscilaciones de un período más largo que el período crítico T_0, son decrecientes; se mantienen solamente las oscilaciones del período $T \leqslant T_0$.

La ecuación [5.36] tiene sus raíces fuera del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ que hemos considerado. Si la ecuación se cumple en el intervalo para un determinado valor de β, se cumple también para el valor $\beta \pm k\pi$ (donde $k = 1, 2, \ldots$) que se encuentra fuera de este intervalo, lo que se desprende de las propiedades $\operatorname{tg}(\beta \pm k\pi) = \operatorname{tg}\beta$. Junto a la raíz β existen, pues, las raíces $\beta \pm \pi$, $\beta \pm 2\pi$. A estas raíces les corresponden los componentes oscilatorios suplementarios en la solución de la ecuación de reacción del sistema. Las oscilaciones relacionadas con estas raíces tienen, sin embargo, una frecuencia corta. Como hemos visto, en el interevalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ las raíces se presentan como un par β y $-\beta$ que corresponde a los puntos de intersección R y S en la figura 55, con lo que $\beta > 0$. Tenemos, pues, que $\beta + \pi > \pi$, $\beta + 2\pi > 2\pi$, $\beta + 3\pi > 3\pi$, etc.; los correspondientes períodos de oscilación cumplen las desigualdades $T < 2$, $T < 1$, $T < \frac{2}{3}$, etcétera.

Como se ve, los períodos de oscilación —excepto uno— son menores de la unidad de tiempo, para la cual hemos tomado el período de tiempo existente entre la decisión de inversión y la producc.ón de los bienes de inversión. Oscilaciones como ésta no deben aparecer al dividir el tiempo en períodos unitarios Θ y, por lo tanto, pueden despreciarse. Las oscilaciones de periodicidad $T < 2$, tienen cierta posibilidad de aparecer; puesto que $\beta < \frac{\pi}{2}$, su período es $\frac{4}{3} < T < 2$. De la relación arriba expresada entre el período de oscilación y el valor α se deduce que cuando su período es cercano a 2 unidades de tiempo, α es muy pequeña ($\alpha < 0$); o sea, las oscilaciones están notablemente amortiguadas; y si no lo están, su período está muy cerca del límite inferior $\frac{4}{3}$, así que no sobrepasa mucho la unidad de tiempo. En resumen, estas oscilaciones no tienen mayor importancia. En la práctica sólo merecen atención las oscilaciones

que corresponden a la raíz β en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, las cuales, como hemos visto, tienen una periodicidad superior a 4 unidades de tiempo.

La discusión de las raíces de la ecuación característica [5.33] lleva al siguiente resultado[19]: El modelo de Kalecki es estable solamente cuando $a < 1$, puesto que en el caso de que $a \geqslant 1$, aumentan las oscilaciones que aparecen en la solución de la ecuación de reacción del sistema, y si hay componentes no oscilatorios (correspondientes a las raíces reales), éstos poseen una tendencia infinitamente creciente (si $a > 1$) o un valor constante (si $a = 1$). En ese caso el sistema es inestable. Sin embargo, $a < 1$ solamente es condición necesaria, pero no suficiente, de la estabilidad. Las raíces reales, si existen, son negativas, por lo que los componentes no oscilatorios de la solución desaparecen con el tiempo; puede ocurrir que $\alpha \geqslant 0$, o sea, que son posibles las oscilaciones de amplitud constante o creciente. Las oscilaciones de este tipo tienen, sin embargo, un período relativamente corto; o sea, $4 < T \leqslant T_0$.

La estabilidad del modelo de Kalecki y el carácter de los procesos oscilatorios que en él se presentan dependen de los valores de los coeficientes a y b que aparecen en la ecuación de reacción del sistema. El coeficiente a expresa *la sensibilidad de las decisiones de inversión para la acumulación (ahorro global)*, que en ciertas condiciones (es decir, cuando los capitalistas acumulan) se iguala a la ganancia global no consumida de los capitalistas. Como vemos, la condición necesaria (sin embargo insuficiente) de la estabilidad,

[19] Sobre la discusión y solución de las raíces de la ecuación característica que aparecen en el modelo de Kalecki, existe una bibliografía bastante amplia. Las posiciones más importantes de esta bibliografía son las siguientes: R. Frisch y H. Holme, *The Characteristic Solutions of a Mixed Difference and Differential Equation*, "Econometrica" 1935; R. G. Allen, *Mathematical Economics*, Londres-Nueva York 1957, págs. 254-258 (edición polaca *Ekonomia matematyczna*, Varsovia 1961, págs. 276-280); N. D. Hughes, *Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-Differential Equation*, "Journal of the London Mathematical Society" 1950, y R. Bellman y K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Nueva York-Londres 1961, págs. 444-446. Incluso se ha construido un computador electrónico analógico para resolver el modelo de Kalecki. Véase O. J. Smith y J. M. Erdley, *An Electronic Analogue for an Economic System*, "Electrical Engineering" 1951 (traducción rusa en el libro *Processy regulirovania v modieliaj ekonomichesquij sistem*, Moscú, 1961).

es $a<1$, luego la dimensión de las decisiones de inversión tiene que ser menor que la acumulación global. El coeficiente b expresa *la sensibilidad de las decisiones de inversión al volumen del capital real.* La importancia de este coeficiente es la siguiente: si $a+b<e^{a-1}$, entonces (al ser $a<1$) existen dos raíces negativas, el componente no oscilatorio de la solución de la ecuación de reacción del sistema tiende a cero con el transcurso del tiempo y las oscilaciones eventuales se superponen a la tendencia decreciente. Entonces $K(t)=K_0 e^{\lambda t}\longrightarrow 0$, o sea, el volumen de capital real disminuye y el sistema no puede asegurar ni la reproducción simple.

La explicación es la siguiente: la dimensión de las decisiones de inversión es menor que la dimensión de la acumulación, lo que, unido a la falta de otros factores compensadores, lleva a la reproducción incompleta. Para evitarlo tiene que darse que $a+b\geqslant e^{a-1}$, o sea, $b\geqslant e^{a-1}-a$ lo que significa que el coeficiente de sensibilidad de las decisiones de inversión al volumen de capital real tiene que ser suficientemente grande. En este caso la tendencia a la reproducción incompleta que resulta de $a<1$ se encuentra con una disminución consistente en que de acuerdo con la tendencia aludida la disminución del volumen de capital real produce un aumento de las decisiones de inversión que se opone a esa tendencia. En tal caso, o existe una raíz real (cuando $b=e^{a-1}-a$), *o* (cuando $b>e^{a-1}-a$) no hay raíces reales. En el primer caso habrá un componente constante (invariable en el tiempo) no oscilatorio de la solución al cual se superponen las oscilaciones; en el segundo caso se da solamente el componente oscilatorio de la solución siempre que el valor medio del proceso oscilatorio sea igual a cero. En ambos casos se presenta la reproducción simple a un determinado nivel.

Como se ve, en el modelo de Kalecki es imposible una situación en la que se dé una tendencia creciente (las raíces reales positivas) sin oscilaciones también crecientes. La tendencia creciente exige pues $a>1$ (es decir, que la dimensión de las decisiones de inversión sobrepase la acumulación global), pero al ser $a>1$, las oscilaciones son también crecientes (puesto que entonces $\alpha>0$). La tendencia creciente, o sea, la reproducción ampliada del capital real se paga con la inestabilidad del sistema. La estabilidad, en cambio, se paga con la reproducción incompleta o, a lo sumo, con la

simple reproducción. Este es, según el modelo de Kalecki, el dilema fundamental del sistema capitalista: crecimiento e inestabilidad; o estabilidad y estancamiento, o incluso retroceso.

A base de datos estadísticos, Kalecki llevó a cabo una evaluación experimental de los valores de los coeficientes a y b [20]. Encuentra $a=0{,}95$ y $b=0{,}12$. De donde resulta que $a+b=1{,}07>1$. En cambio, $e^{a-1}=e^{0{,}05}=0{,}95<1$. Resumiendo, $a+b<e^{a-1}$; o sea, la ecuación característica no tiene raíces reales. Las raíces imaginarias $\alpha+i\beta$ y $\alpha-i\beta$ cumplen la ecuación $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{a-\alpha}\beta$. Para $\alpha=0$ determinamos el valor crítico β_0 y de la ecuación $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}=\dfrac{1}{0{,}95}$ obtenemos aproximaadmente $\beta_0=0{,}38$, de donde $T_0=\dfrac{2\pi}{\beta_0}=8{,}25$. Kalecki considera también que el intervalo Θ va desde $\dfrac{1}{2}$ año hasta un año; entonces aparecen las oscilaciones de amplitud constante, cuyo período abarca desde algo más de 4 años hasta más de 8, y las oscilaciones con un período más largo están amortiguadas. Tomando $\Theta=1$ año, las oscilaciones de amplitud constante correspondenrían, aproximadamente, al ciclo coyuntural de 8 años, al tomar $\Theta=\dfrac{1}{2}$, el ciclo coyuntural cuya longitud se acerca a los 8 años, estaría

---

[20] Véase M. Kalecki, *A Macrodynamic Theory of Business Cycles*, "Econometrica", 1935, pág. 339. La evaluación se basa en datos correspondientes a los años 1909-1918 en los Estados Unidos. Kalecki llevó a cabo también la evaluación para los Estados Unidos en los años 1929-1940. Tomando $\Theta=1$ obtenemos $\dfrac{a}{1+b}=0{,}76$, lo que si $b=0{,}12$ da 0,85. En tal caso, el coeficiente $b=0{,}12$ (como en el caso anterior) daría $b=0{,}7$. Suponiendo $\Theta=\dfrac{1}{2}$ año, obtenemos $\dfrac{a}{1+b}=0{,}76$, lo que si $b=0{,}12$ da 0,85. En tal caso, el coeficiente de sensibilidad de las decisiones de inversión al ahorro global es más bajo que durante el período 1909-1918. Esto es comprensible, si tenemos en cuenta que los años 1929-1940 abarcan un período de depresión económica. Véase M. Kalecki, *Teoria dynamiki gospodarczej*, Varsovia 1959, páginas 147-148.

amortiguado. Con las propiedades enumeradas de los coeficientes a y b y del lapso de tiempo Θ, el modelo de Kalecki da entonces un proceso de reproducción simple, acompañado por oscilaciones de amplitud constante o amortiguadas y correspondientes al ciclo de la coyuntura económica determinado empíricamente.

Como vemos en el modelo de Kalecki, no puede haber reproducción ampliada si al mismo tiempo se mantiene la estabilidad del sistema y la reproducción en un sistema estable es simple e incompleta. A esto hay que añadir que en la ecuación de reacción del sistema [5.33] se tomó la alimentación $x(t)=0$ del segundo miembro de la ecuación. También se puede introducir en el segundo miembro de la ecuación la alimentación positiva $x(t)=A(t)>0$, que expresa las inversiones autónomas (o sea, las independientes de la rentabilidad). Estas pueden unirse al progreso técnico, que produce inversiones no basadas en un cálculo directo de rentabilidad a corto plazo, sino en una política de desarrollo de las empresas a largo plazo. Puede tratarse también de inversiones públicas relacionadas con la política estatal a largo plazo (armamentos, política de empleo y de aceleración del crecimiento económico). Entonces a la solución tipo $\bar{y}=\sum_i K_i(0)\, e^{\lambda_i t}$ se añade el componente de alimentación $\hat{y}=[(D-a)e^D+a+b]^{-1}A(t)$. La solución general de la ecuación del sistema toma entonces la siguiente forma:

$$K(t)=\sum_i K_i(0)\, e^{\lambda_i t}+[(D-a)\, e^D+a+b]^{-1}\, A(t)\,.$$

En esta solución la fuente de la reproducción ampliada es el componente de alimentación de la solución; en cambio, el componente propio (que es el resultado de las "características propias" del sistema) asegura solamente una reproducción incompleta o, a lo sumo simple, del capital real (a menos que el sistema sea no estable y el componente propio exprese a la vez la reproducción ampliada y las oscilaciones crecientes).

El enfoque presentado aquí se caracteriza por considerar el crecimiento de la economía capitalista (la reproducción ampliada) como un factor exógeno, que es el resultado de alimentar el proceso "desde fuera" mediante las inversiones autónomas. Para conseguir la reproducción ampliada como resultado, no de la alimentación externa del sistema, sino de las "características propias" de la reproducción capitalista, el modelo de Kalecki exige ciertos cambios [21].

§ 4. Criterios de eficiencia de la regulación y de infalibilidad del funcionamiento de los sistemas

Más arriba (capítulo IV, § 3) hemos considerado una serie de problemas relacionados con la eficiencia de los procesos de regulación. Ahora, tras haber presentado la teoría de la regulación en su forma general, podemos ocuparnos de este problema con mayor precisión. Bajo el nombre de eficiencia de la regulación, se consideran en general dos problemas. El primero es el de la *velocidad* con la que funciona un sistema dado; es decir, la velocidad con que se eliminan las perturbaciones y el sistema se aproxima al equilibrio (estacionario o móvil). El segundo problema es el de la *precisión* de la regulación, o sea, las magnitudes de la diferencia existente entre los valores de la función de salida en el estado de equilibrio del sistema y los valores dados (es decir, el error del sistema de regulación). Sin embargo, en los últimos tiempos se presenta cada vez con mayor frecuencia un tercer problema de eficiencia de la regulación: el de la *infalibilidad* del funcionamiento del sistema de regulación que apareció con toda claridad al comienzo de los años 50, vinculado al rápido desarrollo de las técnicas de construcción de diferentes instrumentos automáticos. Dichos instrumentos, por lo general, son muy complicados; contienen gran número de elementos y, a veces, el fallo de uno o varios de los elementos impide un funcionamiento correcto de todo el sistema. En muchos campos la técnica exige una gran precisión en el funcionamiento de aparatos complicados (por ejemplo: los cohetes teledirigidos o los satélites artificiales). Esto ha impulsado el desarrollo de una nueva rama de

[21] O. Lange *(Teoría reprodulkoja i akumulacji*, Varsovia 1965, segunda edición) da un modelo comparativo con el de Kalecki, que de igual modo considera la tendencia al desarrollo y las oscilaciones cíclicas, como resultado de las "características propias" del proceso de reproducción capitalista, lo que permite transformarlo en el modelo de la reproducción socialista (en el cual aparece el ciclo coyuntural).

la automatización, frecuentemente llamada "ingeniería de la infalibilidad" *(reliability engineering)* y también de su teoría correspondiente [22]. Dado que el problema de la infalibilidad tiene gran importancia para el control y regulación de los procesos económicos, nos ocuparemos de él detalladamente.

Como hemos visto, la forma general de la ecuación de reacción del sistema dada en [5.15] en el § 2, es:

$$y(t)=\sum_j q_j(t)\, e^{\lambda_j t}+\hat{y}(t)\,,$$

donde el primer elemento del segundo miembro constituye el componente propio y el segundo el componente de alimentación de la solución. El sistema es estable si $re\,\lambda_j<0$ para todos los índices j. De este modo los valores absolutos $|\,re\,\lambda_j\,|$ deciden la velocidad con que el sistema se aproxima al equilibrio.

Escribiendo como hicimos más arriba $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$ (fórmula [5.19] en el § 2) y

$$e^{\lambda_j t}=e^{\alpha_j t}\,(\cos\beta_j t+i\,\mathrm{sen}\,\beta_j t)\,,$$

interpretamos el componente propio como la suma de oscilaciones. Cada una de estas oscilaciones tiene una amplitud $e^{\alpha_j t}$. La velocidad de cambio de esta amplitud es igual

$$\frac{de^{\alpha_j t}}{dt}=\alpha_j e^{\alpha_j t}$$

y su duración es

$$\frac{\dfrac{de^{\alpha_j t}}{dt}}{e^{\alpha_j t}}=\alpha_j\,.$$

Si $\alpha_j<0$, como lo es en un sistema estable, α_j mide el tiempo en el cual tiene lugar la disminución de las oscilaciones. La duración es tanto mayor cuanto menor es α_j; o sea, cuanto mayor es el valor absoluto $|\,\alpha_j\,|$. Por lo tanto, denominamos al valor absoluto *coeficiente de disminución.*

[22] Una introducción en este campo de la ciencia puede verse en D. N. Chorafas, *Procesy statystyczne i niezawodnosc urzadzen,* traducción del inglés, Varsovia 1963. Véase también D. O. Ellis y F. J. Ludwig, *Systems Philosophy,* Englewood Cliffs 1962.

Determinadas oscilaciones cuya suma es el componente propio de la ecuación de reacción del sistema, poseen diferentes coeficientes de disminución. El menor de estos coeficientes decide la velocidad con la que el sistema se acerca al equilibrio, puesto que la oscilación que le corresponde es la que más lentamente se anula. En resumen: como su medida es la velocidad con la cual el sistema se aproxima al equilibrio, o sea, con la que se eliminan las perturbaciones, puede servir $\min_j |\,\alpha_j\,|$, o sea,

$$\min_j |\,re\lambda_j\,|\,. \qquad [5.37]$$

La medida señalada de velocidad del funcionamiento del proceso de regulación abarca también el caso en el que λ_j son todas reales y el proceso de aproximación al equilibrio no es oscilatorio, sino monótono. A este respecto basta tomar por encima de $\beta_j=0$, y entonces $\alpha_j=\lambda_j$ La medida de la velocidad del funcionamiento del proceso de regulación es entonces simplemente $\min_j |\,\lambda_j\,|$; y expresa la duración del proceso monótono de anulación de las desviaciones del estado de equilibrio.

En el caso del que se ha hablado más arriba, en el § 2, cuando la ecuación característica de la reacción del sistema tiene una o más raíces imaginarias tales que $re\,\lambda_j<0$, o sea, que aparecen oscilaciones amortiguadas, la expresión [5.37] es la medida de la velocidad del proceso de autocontrol del sistema y expresa el tiempo en el que se anulan las oscilaciones de la tendencia de desarrollo del sistema.

En el estado de equilibrio del sistema la solución general de la acuación de reacción del sistema llega a ser igual a su componente de alimentación; o sea, $y(t)=\hat{y}(t)$. Si $\hat{y}(t)$ es siempre igual al valor dado $z(t)$, decimos que el sistema de regulación funciona con la *precisión óptima.* Sin embargo, por definición la precisión óptima es imposible de lograr, o bien pudiera resultar costosa. La estructura del sistema puede ser tal que con cualquier selección de la función de entrada (alimentación) $x(t)$ sea imposible lograr la exacta igualdad $y(t)=z(t)$ para todos los valores y una reconstrucción del sistema tal que lo hiciese posible, puede resultar costosa. Entonces

hay que conformarse con un cumplimiento aproximado de esta ecuación. Además, aun cuando la estructura del sistema sea "impecable", es decir, cuando no cometa lo que hemos llamado *error sistemático,* la igualdad mencionada no se cumplirá con frecuencia a causa de cambios casuales (azarosos) en la tensión $x(t)$ o en el funcionamiento del sistema (por ejemplo, las vibraciones de los mecanismos) que escapan al control humano. En este caso, el componente de alimentación $y(t)$ está sometido a variaciones casuales, que producen diferencias $y(t)-z(t)$ que tienen el carácter de variables azarosas. En este caso hablamos de *errores casuales* en el funcionamiento del sistema de regulación [25].

Como medida del error —tanto sistemático como casual— del funcionamiento del sistema de regulación durante un período Θ, se toma por regla general la variable

$$\sigma^2=\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}[\hat{y}(t)-z(t)]^2\,dt\,. \qquad [5.38]$$

La inversión de la variable puede servir como medida de la *precisión* del funcionamiento del sistema. La señalamos por

$$\pi=\frac{1}{\sigma^2}. \qquad [5.39]$$

De esta manera podemos comparar la precisión del funcionamiento de diferentes sistemas de regulación.

En ocasiones nos interesará no tanto el valor absoluto del error de funcionamiento del sistema, cuanto su valor relativo respecto al valor dado (la norma) $z(t)$. Puesto que salvo en el caso de la regulación simple, cuando $z(t)=\text{const.}$, el valor $z(t)$ varía con el tiempo, relacionamos el valor del error con el promedio del valor dado; o sea, con $\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} z(t)\,dt$. Así obtenemos la medida del error

[25] En la técnica el error sistemático y casual se denomina *desviación.*

relativo en forma de lo que en estadística se denomina *coeficiente de variabilidad* [26].

$$v=\frac{\sigma^2}{\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} z(t)\,dt}. \qquad [5.40]$$

La medida de la precisión del funcionamiento del sistema de regulación es entonces la inversión de los coeficientes de variabilidad que hemos señalado:

$$\pi^*=\frac{1}{v} \qquad [5.41]$$

La llamaremos medida de la *precisión relativa,* para distinguirla de la [5.39] que es la medida de la precisión absoluta.

Surge una pregunta: ¿por qué se toma como base para medir la precisión del funcionamiento del sistema la variable determinada por la fórmula [5.38] y no, por ejemplo, el promedio de los valores absolutos de las desviaciones $|\hat{y}(t)=z(t)|$ u otra función de estas desviaciones? Notemos que la variable σ^2 se divide en dos componentes, uno de los cuales mide el error sistemático y el otro los errores casuales en el funcionamiento del sistema.

Indiquemos por $\hat{y}_s(t)$ el valor del componente de alimentación que resulta de la estructura del sistema y por $\epsilon(t)$ el error casual en el funcionamiento del sistema. Entonces $\hat{y}(t)=\hat{y}_s(t)+\epsilon(t)$ e $\hat{y}(t)-z(t)=\hat{y}_s(t)-z(t)+\epsilon(t)$. De donde $[\hat{y}(t)-z(t)]^2=[\hat{y}_s(t)-z(t)]^2+[\epsilon(t)]^2-2[\hat{y}_s(t)-z(t)]\epsilon(t)$.

Finalmente,

$$\sigma^2=\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}[\hat{y}_s(t)-z(t)]^2\,dt+\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}[\epsilon(t)]^2\,dt+\frac{2}{\Theta}\int_0^{\Theta}[\hat{y}_s(t)-z(t)]\,\epsilon(t)\,dt\,.$$

[26] Véase, por ejemplo, Stefan Szulc, *Metody statystyczne,* segunda edición. Varsovia 1961, pág. 243. A. Weryha, *Statystyka teoretyczna,* tomo I, Varsovia 1954, pág. 115, y O. Lange, *Teoria statystyki,* parte I, Varsovia 1952, pág. 130.

Considerando que el error casual $\epsilon(t)$ es independiente (o por lo menos no correlativo) del error sistemático $\hat{y}_s(t) - z(t)$, constatamos, de acuerdo con la conocida determinación de la estadística matemática, que la última expresión del segundo miembro es igual a cero [25]. Indicando la primera expresión del segundo miembro por σ_s^2 y la segunda por σ_p^2, obtenemos

$$\sigma^2 = \sigma_s^2 + \sigma_p^2, \qquad [5.42]$$

o sea, que la variable que mide el error del funcionamiento del sistema es la suma de dos componentes, de los cuales uno determina el error sistemático y el otro el error casual. Ambos componentes son variables. Aceptar la variable como la medida del error medio casual, viene impuesto por el significado y las propiedades que tiene la variable en cuanto parámetro de las distribuciones de probabilidad y en cuanto medida del error al efectuar su evaluación (estimación) en términos de estadística matemática. Para poder aplicar la ecuación [5.42] consideramos la variable como medida del error sistemático. En resumen: el error de conjunto, o sea, el sistemático y el casual, se miden también por medio de la "variable", o sea, la expresión [5.38]. Esto concuerda con el procedimiento normalmente aplicado en estadística al igualar la llamada filtración y extrapolar las series temporales [26].

Pasemos ahora a un aspecto especialmente importante de la eficiencia del funcionamiento de los sistemas de regulación, o sea, al problema de la infalibilidad. Un elemento aislado puede *fallar,* al no efectuar, por ejemplo, la transformación que normalmente debe realizar. El fallo puede consistir en que realice una transformación nula en vez de la prevista, o sea, que el estado de la salida adquiera valor cero, independientemente del valor del estado de la entrada;

[25] Puesto que el valor medio de la distribución de la probabilidad de los errores casuales es igual a cero (como se desprende de la interpretación de los errores casuales, ya que en el caso contrario se daría un error sistemático), esta expresión se puede interpretar como la covariable del error casual y del sistemático. La covariable es igual a cero cuando estos errores no son correlativos; tanto más cuando son independientes (las magnitudes estadísticamente independientes son no correlativas, y no necesariamente a la inversa).

[26] Véase N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Statistical Time Series,* Nueva York 1949, págs. 13-14.

o bien que con el valor dado del estado de la entrada, el estado de la salida difiera del valor previsto más allá de la tolerancia permisible. En el primer caso decimos que el elemento no funciona *en absoluto,* en el segundo que funciona *mal.* En ambos casos que el elemento *falla.* Supongamos que cada elemento del sistema tiene la probabilidad de fallar durante un tiempo determinado. Llamemos a esta probabilidad, que señalaremos por q, *falibilidad* del elemento. En ese caso, $p = 1 - q$ es la probabilidad de que durante un tiempo dado no fallará; o sea, será su *infalibilidad* [27].

La infalibilidad de un elemento es, pues, una probabilidad; con un gran número de repeticiones independientes [28] del funcionamiento del elemento, dicha probabilidad, conforme a la ley de los grandes números, mide la frecuencia relativa de los casos en los que el elemento no falla en su funcionamiento durante un tiempo determinado. Señalemos este tiempo por τ. Si el estado de la salida y corresponde al valor x del estado de la entrada tiene el valor $y = Tx$ (donde T es el operador de la transformación), y la infalibilidad del elemento es p; entonces durante el tiempo τ ese estado de la salida tiene el valor medio (la esperanza matemática) $py = pTx$. Así, pues, la infalibilidad del elemento puede representarse por un diagrama de bloques en forma de un elemento suplementario acoplado en serie, en el cual se efectúa la transformación proporcional con el operador $0 \leqslant p \leqslant 1$, como se muestra en la figura 56.

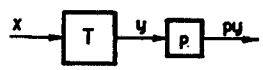


FIG. 56

Analicemos ahora el sistema compuesto de n elementos acoplados en serie. Indicando por $T_1, T_2, \ldots T_n$ los operadores de las transfor-

[27] En inglés, *reliability*; en ruso, *nadioznost*; en francés, *fiabilité.*

[28] La ley de los grandes números funciona también en ciertos casos en los que las repeticiones de un suceso dado no son independientes. En cuanto a las condiciones en las cuales se cumple la ley de los grandes números, véase O. Lange, *Teoria statystyki,* parte II, Varsovia 1952 (conferencia), págs. 139-145, y B. W. Gniedienko, *Kurs teorii vieroiatnostiei,* Moscú-Leningrado 1950, cap. VII. Véase también S. N. Bernstein, *Teoria vieroiatnostiei,* tercera edición, Moscú-Leningrado 1934, págs. 171-192. Un enfoque más general en A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Berlín 1962, págs. 348-350.

maciones que se efectúan en estos elementos, y por $p_1, p_2, \ldots p_n$ la infalibilidad de los elementos (en tiempo determinado τ), obtenemos el cuadro de la figura 57a. Suponemos que la infalibilidad de los elementos particulares es independiente. La transformación conjunta que se efectúa en el sistema es entonces $T_n p_n \ldots T_2 p_2 T_1 p_1 x$, donde x

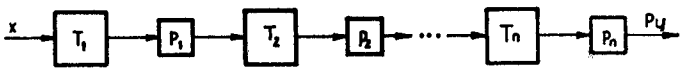


FIG. 57a

es el estado de la entrada del sistema. Puesto que $p_1, p_2 \ldots p_n$ son operadores de la transformación proporcional, les afecta la ley conmutativa de la multiplicación y la transformación puede anotarse en la forma $p_1 p_2 \ldots p_n T_n \ldots T_2 T_1 x$. Escribiendo $y = T_n \ldots T_2 T_1 x$, obtenemos

$$p_1 p_2 \ldots p_n y = p_1 p_2 \ldots p_n T_n \ldots T_2 T_1 x .$$

Esta notación está representada en la figura 57b.

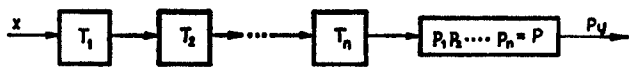


FIG. 57b

El resultado obtenido puede simplificarse aún más introduciendo las transformaciones conjuntas de operadores $T = T_n \ldots T_2 T_1$ y $P = p_1 p_2 \ldots p_n$. Tenemos entonces

$$Py = PTx . \qquad [5.43]$$

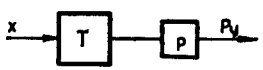


FIG. 58

El funcionamiento del sistema está anotado aquí de manera sumaria y su diagrama de bloques puede verse en la figura 58.

Llamaremos *infalibilidad del sistema* al operador conjunto. Como puede observarse,

$$P = p_1 p_2 \ldots p_n , \qquad [5.44]$$

o sea, que la infalibilidad del sistema compuesto por elementos acoplados en serie es el producto de la infalibilidad de sus elementos. Dado, pues, que la infalibilidad es una probabilidad, entonces $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ (para $i = 1, 2, \ldots, n$). Omitiendo por irrelevante el caso extremo en que $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ o $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$; o sea, cuando todos los elementos funcionan con absoluta seguridad o no funcionan en absoluto, encontramos que *la infalibilidad del sistema disminuye al aumentar el número de elementos acoplados en serie,* puesto que el valor P disminuye cuando aumenta el número de factores del producto [5.44]. Indicando por p la media geométrica de la infalibilidad de los elementos ($0 \leqslant p < 1$, si todos los $0 \leqslant p_i < 1$), tenemos

$$P = p^n , \qquad [5.45]$$

o sea, la infalibilidad del sistema disminuye en progresión geométrica al aumentar el número de elementos acoplados en serie, como puede apreciarse en el cuadro siguiente:

Número de elementos del sistema n	Infalibilidad media por elemento p	Infalibilidad del sistema P
10	0,99	0,9
100	0,99	0,4
1000	0,99	0,00004
500	0,999	0,6
1000	0,999	0,4

Como puede apreciarse, a mayor número de elementos acoplados en serie, menor infalibilidad del sistema, aún cuando la de los elementos sea alta. Si la infalibilidad media de un elemento es 0,99, o sea, el elemento falla con una probabilidad media de 0,01; es suficiente que el sistema tenga 100 elementos para que su infalibilidad sea solamente de 0,4, o sea, para que el sistema falle con una probabilidad 0,6 (es decir, en más de la mitad de los casos). Al tener 1000 elementos el sistema es prácticamente incapaz de funcionar porque no falla solamente en 4 casos por 100 000. Incluso con un promedio tan alto de infalibilidad por elemento, como 0,999, o sea, con una

falibilidad de 1 por 1000, el sistema de 500 elementos acoplados en serie tiene una infalibilidad de 0,6 solamente, y con 1000 elementos de 0,4.

Para alcanzar una infalibilidad suficientemente alta en un sistema compuesto por un gran número de elementos acoplados en serie, la infalibilidad media de cada elemento tiene que ser muy alta, casi igual a la seguridad absoluta. Como puede verse en el cuadro siguiente, para un sistema compuesto de 500 elementos:

Infalibilidad del sistema P	Infalibilidad media por elemento p
0,7	0,993
0,8	0,9995
0,9	0,9998
0,95	0,9999

La disminución de la infalibilidad del sistema al aumentar el número de elementos acoplados en serie se presenta no solamente en el caso considerado, cuando la infalibilidad de los elementos es independiente. Tampoco lo hace cambiar la relación entre la infalibilidad de los elementos en particular. Puesto que en este caso, en vez de la fórmula, [5.44], tenemos

$$P = p_1 p_{2/1} p_{3/12} \cdots p_{n/12 \cdots n-1}, \qquad [5.46]$$

donde p_1 es la infalibilidad del primer elemento, $p_{2/1}$ la infalibilidad condicional del segundo elemento en la suposición de que el primero no falle, $p_{3/12}$ la infalibilidad condicional del tercer elemento en la suposición de que el primero y el segundo no fallen, etc. Salvo en el caso irrelevante de que todos los elementos funcionan con absoluta seguridad, los factores que aparecen en el producto del segundo miembro de la fórmula [5.46], son todos menores de uno y, por lo tanto, P disminuye al aumentar el número de factores del producto. El resultado obtenido es entonces generalizable.

La tesis de que en los sistemas compuestos por elementos acoplados en serie, la infalibilidad disminuye rápidamente al aumentar

el número de elementos del sistema, es la ley fundamental de la teoría de la infalibilidad del funcionamiento de los sistemas. Esta ley aparece en diferentes campos; en la técnica, donde el experimento muestra claramente que, al aumentar la cantidad de elementos acoplados en serie en un aparato mecánico o eléctrico, o al aumentar la cantidad de elementos en un proceso químico disminuye rápidamente la infalibilidad del aparato o del proceso. Se da en las funciones de los organismos vivos y en la actividad humana que utiliza una gran cadena de acciones intermedias. En tal caso, si la cadena de acciones intermedias es muy larga, la probabilidad de obtener el efecto deseado se reduce mucho, puesto que cada eslabón de la cadena puede fallar y la probabilidad de que todas las uniones funcionen infaliblemente se hace muy pequeña. Esta ley tiene gran importancia en la economía y en la política. Y aplicada a la lógica vemos que tampoco nos permite obtener conclusiones infalibles. En este caso la larga cadena de conclusiones se caracteriza por su baja infalibilidad. La probabilidad de que la conclusión final, basada en esta cadena, sea verdadera, es muy pequeña; la conclusión es dudosa en alto grado. Todo esto es típico de las largas cadenas de conclusiones, cuyos elementos no se comprueban experimentalmente, para toda clase de sistemas teóricos de especulación, bien sea en filosofía, cosmología, geología, etc. Así se explica la esterilidad de las teorías científicas basadas en el análisis puramente especulativo, no controlado por la experimentación frecuente.

Puesto que muchos aparatos técnicos, para alcanzar el objetivo previsto requieren para su funcionamiento un número grande, o a veces inmenso, de elementos acoplados en serie, y dado que sucede lo mismo en los organismos vivos y en la actividad humana, surge la pregunta de si hay alguna manera de aumentar la infalibilidad del sistema sin disminuir el número de elementos acoplados en serie.

La biología nos sugiere la posibilidad de que tal método exista. Las funciones vitales de los organismos y especialmente el funcionamiento del sistema nervioso central en el hombre muestran un alto grado de infalibilidad, a pesar de que aquí se da el acoplamiento en serie de un gran número de elementos (por ejemplo, neuronas de los circuitos receptores-efectores). La alta infalibilidad de los organismos vivos, consistentes en complicados sistemas de un enorme

número de elementos acoplados, indica que se pueden construir sistemas de gran número de elementos y, a la vez, de una gran infalibilidad en su funcionamiento. Se trata de encontrar "el principio de construcción" de estos sistemas.

Y, en efecto, se ha encontrado tal "principio". En 1952, John von Neumann (recientemente fallecido), uno de los más destacados matemáticos contemporáneos, pronunció una conferencia titulada *Lógica probabilística y construcción de organismos infalibles compuestos de elementos falibles*[29]. Dicha conferencia en la que Neumann demostró que a partir de elementos falibles se pueden construir sistemas de infalibilidad relativamente alta, ha sido la base de la teoría y de la técnica contemporáneas de la infalibilidad. Este fue el punto de partida de amplias investigaciones y de la numerosa bibliografía que ha ido apareciendo sobre el tema[30].

El "principio de construcción" que permite proyectar sistemas de infalibilidad arbitrariamente alta a partir de elementos falibles, es simple. Consiste en introducir en el sistema un número adecuado de *elementos de reserva,* acoplados en paralelo; o sea, como a menudo se denomina, la multiplicación de elementos por medio del acoplamiento en paralelo. El acoplamiento en paralelo de los elementos multiplicados difiere, sin embargo, del acoplamiento en paralelo que hasta ahora hemos venido considerando. En este último, los valores del estado de salida se suman; en el diagrama de bloques esto se representa de manera que las líneas que corresponden a

[29] *Probabilistic Logic and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components,* California Institute of Technology 1952. La conferencia está reimpresa en John von Neumann, *Collected Works,* tomo V, Oxford-Londres 1963. La traducción al ruso en la obra *Avtomate,* Moscú 1956.

[30] Al lado de la conferencia de Neumann la más destacada obra en este campo es la de E. F. Moore y C. E. Shannon, *Reliable Circuits Using Less Reliable Relays,* "Journal of the Franklin Institute" 1956. Traducción al ruso en *Kiberneticheski Sbornik,* tomo I, Moscú 1960. Véase también F. Reza, *A Note on Reliability Functions,* Proceedings of the 2nd International Congress of Cybernetics, Namur 1960 (traducción al ruso en *Kiberneticheski Sbornik,* tomo V, Moscú 1962). Exposición sistemática del estado actual de la ciencia en este campo se halla en W. M. Gluszkow, *Sintez Cifrovej Avtomatov,* Moscú 1962, cap. III, § 3. Sobre el tema de la aplicación mencionada del "principio de la construcción" en los organismos vivos, véase W. C. Culloch. *The Reliability of Biological Systems,* en el conjunto *Self-Organizing Systems,* Oxford-Londres 1960. Véase también J. Cowan, *Many Valuec Logics and Reliable Automata* en el conjunto *Principles of Self-Organization,* Oxford-Londres 1962.

estados de salida de los elementos particulares convergen en el llamado punto de adición que señalamos con el símbolo ⊕. Supongamos ahora que el estado de salida del sistema de elementos acoplados en paralelo adquiere un valor igual al valor del estado de salida de uno sólo de los elementos componentes. A este tipo de acoplamiento en paralelo le denominamos *acoplamiento alternativo.* El estado de salida del sistema de elementos está determinado por cualquiera de éstos y los restantes elementos no influyen en el estado de salida del sistema, permaneciendo en cierto modo "pasivos" y en un papel de reserva. En el diagrama de bloques represen-

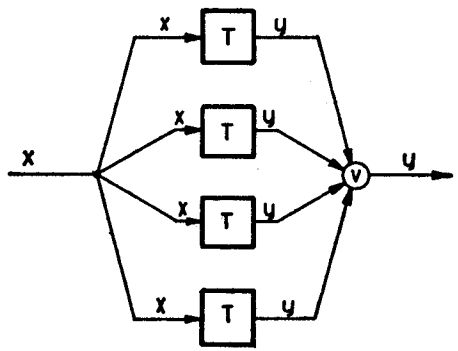


FIG. 59

tamos el acoplamiento alternativo en paralelo, de tal manera que las líneas que corresponden a los estados de salida de elementos particulares, convergen en el punto señalado por medio del sig-particulares, convergen en el punto V, o sea, un círculo en el que se inscribe el símbolo de la disyunción lógica, al que denominamos *punto de disyunción* y que representa el sistema en el cual se efectúa la transformación no lineal; o sea, la operación lógica de la disyunción (*A* o *B* o *C* o ...). La figura 59 muestra el diagrama de bloques del acoplamiento alternativo en paralelo.

En la figura se considera que todos los elementos realizan la misma transformación y que solamente uno de los resultados de la transformación se transmite a la salida del sistema. La forma de realizarlo puede ser distinta. Por ejemplo, solamente uno de los elementos es activo, o sea, sólo uno efectúa la transformación y los

restantes permanecen pasivos (es decir, realizan una transformación nula) esperando en reserva por si falla el elemento activo y entonces uno de los elementos de reserva pasa a ser activo. Si fallara también éste entrará en actividad otro de los elementos de reserva, etc. Así sucede con frecuencia en aparatos técnicos, tales como máquinas, instalaciones, etc.; denominaremos esta situación *descargada*. Puede ocurrir también que todos o algunos de los elementos sean activos, pero que en el nudo de disyunción la suma de los valores de los estados de salida de los elementos particulares esté sometida a un debilitamiento (por ejemplo, que se divida por el número de elementos activos), por lo que el estado de salida del sistema tendrá siempre un valor igual al del estado de salida de un elemento. Esto constituiría cierto tipo de "disyunción incorrecta"; en realidad, en el *punto de disyunción* se realiza la transformación proporcional de la división por el número de elementos activos. El resultado, sin embargo, es el mismo que el resultado de la disyunción en el sentido propio de la palabra. Así ocurre con frecuencia en los organismos vivos. Con los dos ojos (aunque el campo visual sea mayor) no vemos más intensamente que con uno; al perder un ojo vemos con igual intensidad que con los dos; después de eliminar quirúrgicamente un riñón, el riñón que queda trabaja con igual intensidad con que lo hicieran antes los dos. En la técnica tal situación se denomina *reserva cargada*. Se dan también casos de *reserva parcialmente cargada*.

Consideremos detalladamente un sistema compuesto por m elementos iguales acoplados alternativamente en paralelo. En cada uno de los elementos se efectúa la misma transformación $y=Tx$ con tal de que cada elemento se caracterice por una determinada infalibilidad en su funcionamiento. La infalibilidad de los elementos particulares la indicaremos por $p_1, p_2 \ldots, p_m$. Esto lo ilustra la figura 60. La falibilidad del i-ésimo elemento es $q_i=1-p_i\ (i=1, 2, \ldots, m)$. La probabilidad de que todos los elementos fallen es igual al producto $q_1, q_2, \ldots, q_m$, que indicamos de la siguiente manera:

$$\prod_{i=1}^{m} q_i = \prod_{i=1}^{m} (1-p_i)\,. \qquad [5.47]$$

Puesto que los elementos del sistema están acoplados alternativamente en paralelo, el sistema falla solamente cuando fallan dos de sus elementos, ya que es suficiente que un elemento funcione normalmente para asegurar el funcionamiento correcto de todo el

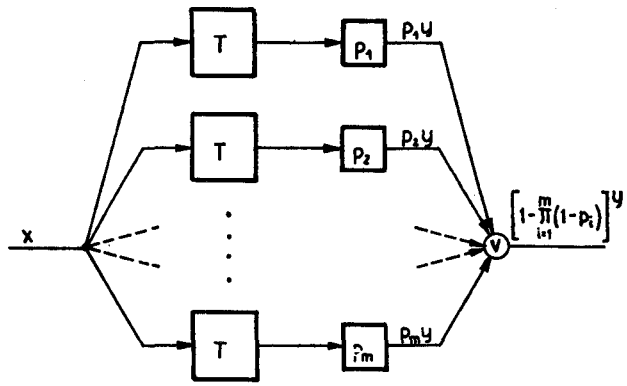


FIG. 60

sistema. La falibilidad del sistema es entonces igual a la probabilidad de que no fallen todos los elementos. Señalando por P la infalibilidad del sistema, como hemos hecho anteriormente, obtenemos

$$P=1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_i)\,. \qquad [5.48]$$

Despreciando el caso irrelevante cuando todos $p_i=1$ o todos $p_i=0$ (o sea, un sistema completamente seguro o un sistema incapaz de funcionar en absoluto) encontramos que *la infalibilidad del sistema aumenta, cuando aumenta el número de elementos acoplados alternativamente en paralelo,* indicando por q la media geométrica de la falibilidad de los elementos ($0<q<1$, puesto que $0<q_i<0$), tenemos

$$P=1-q^m\,. \qquad [5.49]$$

La falibilidad del sistema disminuye en progresión geométrica al aumentar el número de elementos acoplados en paralelo y la infalibilidad aumenta conforme a la fórmula [5.49]. Podemos generalizar

el resultado cuando las infalibilidades (o falibilidades) de los elementos particulares no son independientes.

La mencionada propiedad de infabilidad de los sistemas compuestos de elementos acoplados alternativamente en paralelo, posibilita el aumento de la infalibilidad de cualquier sistema. Tomemos un sistema compuesto por n elementos acoplados en serie y multipliquemos el j-ésimo elemento por m_j veces ($j=1, 2, \ldots, n$) mediante el acoplamiento alternativo en paralelo (es decir, que al *j-ésimo* elemento le agregamos $m_j - 1$ elementos de reserva). Obtenemos entonces el sistema representado en la figura 61.

Indiquemos por p_{ij} la infalibilidad del i-ésimo elemento paralelo en el j-ésimo eslabón del acoplamiento en serie. De acuerdo con la fórmula [5.48] la infalibilidad conjunta del j-ésimo eslabón será:

$$P_j = 1 - \prod_{i=1}^{mj} (1 - p_{ij}) . \qquad [5.50]$$

La infalibilidad de todo sistema de elementos acoplados en paralelo es igual al producto de la infalibilidad de los elementos particulares; es decir, es igual a

$$P = P_1 P_2 \ldots P_n ,$$

o sea:

$$P = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \prod_{i=1}^{mj} (1 - p_{ij}) \right] . \qquad [5.51]$$

La fórmula [5.51] demuestra que la infalibilidad de un sistema de elementos acoplados en serie se puede aproximar a voluntad a uno; o sea, a la seguridad completa de su funcionamiento, lo que podemos conseguir mediante una multiplicación adecuada de los eslabones del acoplamiento en serie por medio del acoplamiento alternativo en paralelo. Como se desprende de la fórmula, tomando productos de m_j suficientemente grandes, la expresión $\prod_{i=1}^{mj} (1 - p_{ij})$ se puede llevar a voluntad hasta cerca de cero. Resumiendo: P se vuelve arbitrariamente cercana a uno.

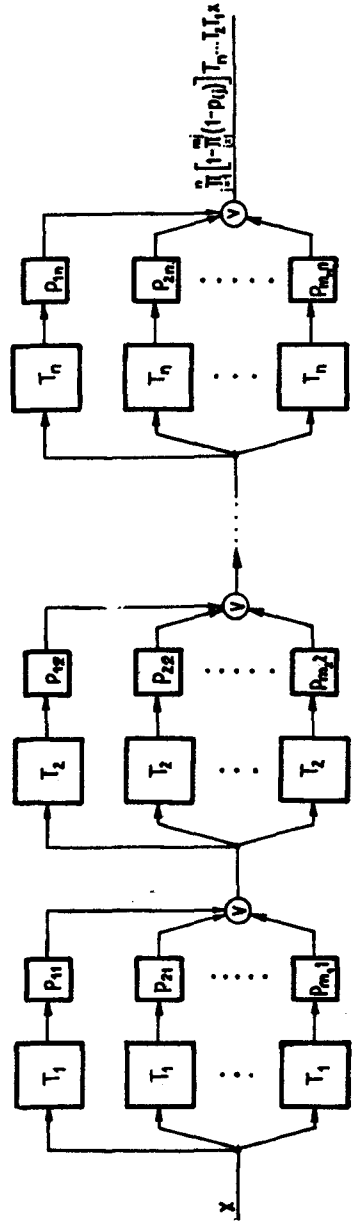


FIG. 61

Los productos m_j pueden aumentarse sin pérdida de la infalibilidad del sistema, incluso aumenta la infalibilidad. Así que se pueden "igualar hacia arriba" los productos m_j dándoles el valor del mayor de ellos; indiquemos este valor por m. El resultado será $m_1=m_2=\ldots=M_n=m$. Determinemos ahora la infalibilidad media de un solo elemento del sistema. Lo haremos en dos etapas sirviéndonos de la media geométrica. Escribiendo

$$\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})=(1-p_j)^m$$

determinamos $1-p_j$ como la falibilidad media en el j-ésimo eslabón del acoplamiento en serie. La expresión $1-(1-p_j)^m$ indica entonces la infalibilidad del j-ésimo eslabón del acoplamiento en serie. Escribiendo

$$\prod_{j=1}^{n}[1-(1-p_j)^m]=[1-(1-p)^m]^n$$

determinamos $[1-(1-p)]$ como la infalibilidad media de cada eslabón particular del acoplamiento en serie. Se puede entonces interpretar p como la infalibilidad de un elemento en todo el sistema.

Como resultado, la fórmula [5.51] puede indicarse de la siguiente manera:

$$P=[1-(1-p)^m]^n, \qquad [5.52]$$

donde n significa el número de elementos acoplados en serie y m el de elementos acoplados alternativamente en paralelo en cada eslabón ($m-1$ es el número de elementos de reserva) y p indica la infalibilidad media de los elementos de todo el sistema. De la fórmula [5.52] se puede deducir el número de productos necesarios —por el número arbitrario de eslabones acoplados en serie y la media dada de infalibilidad de un elemento— para alcanzar una infalibilidad determinada del sistema P. Con este fin modificamos la fórmula [5.52] como sigue:

$$(1-p)^m=1-P^{1/n}.$$

De donde obtenemos

$$m\log(1-p)=\log(1-P^{1/n})$$

y

$$m=\frac{\log(1-P^{1/n})}{\log(1-p)}. \qquad [5.53]$$

Se ve claramente que, dados los valores p y n, m aumenta cuando aumenta el valor dado P. De la misma manera, dados p y P, m aumenta cuando aumenta n.

La siguiente tabla da los valores P correspondientes a diferentes valores m y n para $p=0{,}9$ [31].

		Número de eslabones acoplados en serie			
		$n=1$	$n=3$	$n=20$	$n=100$
Número de elementos paralelos en un eslabón	$m=1$	0,90	0,73	0,12	0,000026
	$m=2$	0,99	0,97	0,81	0.35
	$m=3$	0,999	0,997	0,98	0,90

Como se observa en la tabla, el producto de elementos en determinados eslabones del acoplamiento en serie, aumenta rápidamente la infalibilidad de todo el sistema. Con una infalibilidad media por elemento de 0,9 (el elemento falla entonces en una media de 1/10 de los casos) es suficiente doblar los elementos para alcanzar en cada eslabón una infalibilidad de 0,99 y triplicarlos (o sea, añadirle dos elementos de reserva), para alcanzar la infalibilidad 0,999; o sea, un fallo por 1 000, lo que es lo mismo, una infabilidad muy próxima a la seguridad absoluta. El sistema que tiene 20 eslabones acoplados en serie alcanza una infalibilidad mucho mayor que la infalibilidad media de un elemento —o sea, 0,98— al agregarle dos elementos de reserva (triplicación de los elementos acoplados en paralelo). El sistema que tiene 100 eslabones acoplados en serie al acoplarse dos elementos de reserva a cada eslabón alcanza una infalibilidad igual a la infalibilidad media de un elemento. Resulta,

[31] Véase D. W. Chorafas, *Procesy statystyczne i niezawodnosc urzadzen*, ed. cit., pág. 342. De la misma fuente proceden las tablas de las págs. 159 y 160 de nuestro texto.

pues, que el hecho de agregar un pequeño número de elementos de reserva a cada eslabón del acoplamiento en serie es altamente rentable desde el punto de vista del aumento de la infalibilidad de todo el sistema [32].

Utilizando la fórmula [5.53] se puede determinar —al tener dados p y n— el número de productos de m necesarios para alcanzar una infalibilidad dada del sistema $P=P_0$. El valor P_0 se toma de acuerdo con las necesidades prácticas; por ejemplo, $P_0=0{,}95$, $P_0=0{,}99$,

[32] En vez de multiplicar los elementos entre sí, se pueden multiplicar unidades compuestas de cierto número de elementos acoplados en serie. Por ejemplo, en la producción de piezas de repuesto que se componen de mecanismos completos que forman parte de una máquina o aparato, como el cinescopio (la pantalla de rayos catódicos para televisores), los motores auxiliares de los aviones, etc. Cuando s_j indica el número de los elementos acoplados en serie del j-ésimo conjunto y k el número de los conjuntos ($\sum_{j=1}^{k} s_j=n$), el número de productos del *j-ésimo* conjunto los indicamos por mj.

A partir de un razonamiento similar al empleado más arriba, encontramos que en este caso la infalibilidad del sistema es

$$P=\prod_{j=1}^{k}\left[1-\prod_{i=1}^{mj}(1-\prod_{j=1}^{sj} p_{ij})\right].$$

Esta fórmula se convierte en la [5.51] si $s_j=1$ para $j=1,2,\ldots,k$ (entonces $k=n$), o sea, cuando todos los conjuntos contienen un solo elemento que está acoplado en serie con otros elementos del sistema. Si todos $s_j=s=\frac{n}{k}$ y todos $m_j=m$ y p es la infalibilidad media de un elemento del sistema, la fórmula adquiere la siguiente forma:

$$P=[1-(1-p^{\frac{n}{k}})^m]^k$$

de donde

$$m=\frac{\log(1-P^{\frac{1}{k}})}{\log(1-p^{\frac{n}{k}})}.$$

Con el valor dado p y P, m es el mínimo cuando $k=n$, o sea, si se multiplican los elementos particulares y no todos sus conjuntos. En tal caso es preferible multiplicar los elementos por separado que por conjuntos. En cambio, cuando $k=1$, o sea, al multiplicar todo el sistema acoplado en serie (por ejemplo, una máquina o aparato entero) m es el máximo. Este procedimento es el menos aconsejable. Véase sobre este tema B. R. Levin, *Teoria sluchainej protsesov i ieio primienienie v radiotiejnikie*, Moscú 1960, págs. 20-24.

$P_0=0{,}999$. Dicho valor expresa el grado de confianza requerido para el funcionamiento del sistema. La importancia práctica de la infalibilidad P_0 del sistema es semejante a la importancia práctica del coeficiente de fiabilidad en estadística. Efectivamente, el coeficiente de fiabilidad es la medida de la infalibilidad de una conclusión estadística (estimación o comprobación de hipótesis), es simplemente la infalibilidad de un sistema de hechos que conforma cierto procedimiento estadístico.

En determinadas condiciones se puede, sin embargo, fijar el valor óptimo de infalibilidad de un sistema a partir del cálculo de los costes. Los elementos del sistema cuestan por definición, cuesta a la vez su producción y entretenimiento. Un fallo del sistema ocasiona casi siempre cierta pérdida que, con frecuencia (aunque no siempre, por ejemplo en el caso de la pérdida de vidas humanas), es cuantificable en términos pecuniarios. En tal caso se puede comparar el coste de la introducción de elementos suplementarios de reserva con la disminución de la posible pérdida producida por la falibilidad del sistema. Se puede calcular hasta qué punto vale la pena aumentar la infalibilidad del sistema y así determinar su óptimo.

El cálculo es el siguiente. Indicamos por c_j el coste del elemento en su j-ésimo eslabón de acoplamiento en serie y por s la pérdida en el caso de que el sistema falle, a la que llamaremos *coste de averías*. La probabilidad de la avería (fallo del sistema) es $1-P$; entonces el costo total presumible será:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j c_j + s\,(1-P). \qquad [5.54]$$

El primer componente es el coste de todos los elementos multiplicados, el segundo la esperanza matemática del coste de averías. Se trata de encontrar los valores m_j y los valores P que les corresponden, para los cuales el coste total esperado es el mínimo.

Supongamos que al j-ésimo eslabón del acoplamiento en serie le introducimos un elemento suplementario de reserva. El coste de los elementos multiplicados aumenta por c_j, a la vez que la infalibilidad del sistema aumenta por cierto valor, que señalamos por

$\Delta_j P$; la esperanza matemática del costo de averías varía por $s\Delta_j P$, la variación total de coste es entonces

$$c_j - s\Delta_j P\,.$$

El mínimo del coste total esperado se da cuando esta expresión es igual a cero; o sea [33],

$$c_j = s\Delta_j P \qquad (j=1, 2, \ldots, n)\,. \qquad [5.55]$$

En ese caso el ahorro previsto por la disminución del coste de una avería es igual al coste de un elemento suplementario de reserva.

Los productos m_j son números enteros y las ecuaciones arriba presentadas pueden quedar incumplidas para los valores enteros m_j. En tal caso tomamos como solución los números enteros más cercanos a los valores m_j que cumplen las ecuaciones [5.55] [34].

Determinamos ahora el aumento $\Delta_j P$ de infalibilidad que se da en el sistema al introducir un elemento suplementario de reserva en el j-ésimo eslabón del acoplamiento en serie.

El punto de partida para el cálculo es la fórmula [5.51] que escribimos de la siguiente forma:

$$P=\prod_{r\neq j}\left[1-\prod_{i=1}^{m_r}(1-p_{ir})\right]\left[1-\prod_{i=1}^{m_j}(1-p_{ij})\right]$$

[33] Considerando P como una función continua y mj como una diferencial esta condición se puede anotar de la forma siguiente:

$$c_j = s\,\frac{\partial P}{\partial mj}$$

e interpretarla como la igualdad del ahorro límite esperable del coste de averías y el coste suplementario del elemento de reserva. Sin embargo, puesto que suponemos que los productos m_j son números enteros no aplicamos aquí el cálculo diferencial.

[34] Esto se puede expresar también de tal manera que en vez de ecuaciones tenemos las desigualdades

$$s\Delta_j P^1 \leqslant c_j \leqslant s\Delta_j P,$$

donde $\Delta_j P^1$ es el aumento de la infalibilidad del sistema al introducir el siguiente elemento de reserva. En palabras: el coste de un elemento suplementario de reserva no es mayor que el ahorro previsto del coste de avería: pero es mayor o igual al ahorro previsto al introducir otro elemento.

Tras de introducir el elemento suplementario de reserva en el j-ésimo eslabón, la infalibilidad del sistema es

$$P^1=\prod_{r\neq j}\left[1-\prod_{i=1}^{m_r}(1-p_{ir})\right]\left[1-\prod_{i=1}^{m_j+1}(1-p_{ij})\right]$$

La diferencia $P^1 - P$, o sea, el aumento de la infalibilidad del sistema, es entonces

$$\Delta_j P=\prod_{r\neq j}\left[1-\prod_{i=1}^{m_r}(1-p_{ir})\right]\left[\prod_{i=1}^{m_j}(1-p_{ij})-\prod_{i=1}^{m_j+1}(1-p_{ij})\right]$$

o sea,

$$\Delta_j P=\prod_{r\neq j}\left[1-\prod_{i=1}^{m_r}(1-p_{ir})\right]\left[\prod_{i=1}^{m_j}(1-p_{ij})\right]p_{ij}\,. \qquad [5.56]$$

Esta fórmula puede simplificarse introduciendo la infalibilidad media p del j-ésimo elemento y, por consiguiente, las infalibilidades medias de los elementos en los demás eslabones. Obtenemos entonces

$$\Delta_j P=\prod_{r\neq j}\left[1-(1-p_r)^{m_r}\right](1-p_j)^{m_j}\,p_j \qquad [5.57]$$

A partir de estas ecuaciones determinamos los valores óptimos m_j siempre que, si el valor obtenido no es un número entero, tomemos el número entero más próximo. Escribimos las ecuaciones [5.55] en la siguiente forma:

$$(1-p_j)^{m_j}=\frac{c_j}{s\prod_{r\neq j}\left[1-(1-p_r)^{m_r}\right]p_j}\,, \qquad [5.58]$$

de donde

$$m_j=\frac{\log\dfrac{c_j}{s}-\log\prod_{r\neq j}\left[1-(1-p_r)^{m_r}\right]-\log p_j}{\log(1-p_j)}\qquad (j=1, 2, \ldots, n)\,. \qquad [5.59]$$

Sustituyendo los valores obtenidos m_j o los números enteros más cercanos a la fórmula [5.51], obtenemos el valor óptimo de infalibilidad del sistema P.

En las ecuaciones [5.58], los factores que aparecen junto a s en el primer miembro de las ecuaciones son siempre menores de uno. Para que se cumplan estas ecuaciones tiene que ser $c_j < s$, porque de lo contrario el coste del elemento suplementario de reserva sería siempre mayor que el ahorro previsto en el coste de averías. Si se cumple esta condición, las ecuaciones siempre tienen solución, pues los segundos miembros son funciones monótonamente decrecientes m_j. Existe, pues, siempre un valor m_j —y sólo uno— tal que cumple la ecuación (en el campo de los números reales). De la fórmula [5.58] se deduce también que si c_j aumenta con respecto a s, disminuye m_j, lo mismo que cuando aumenta p_j. Cuanto mayor es el coste del elemento suplementario de reserva en relación con el coste previsto de averías, tantos menos elementos de reserva vale la pena introducir; asimismo el aumento de la infalibilidad media de un elemento disminuye el número de los elementos de reserva rentables. Resumiendo: vale la pena tener más elementos de reserva allí donde la infalibilidad es menor y donde el coste de un elemento de reserva es más bajo.

El "principio de construcción" de sistemas altamente infalibles, compuestos por elementos falibles que hemos discutido, juega un gran papel no sólo en la técnica, sino también en los organismos vivos, en los procesos sociales y especialmente en las económicos. La aparición de "excedentes" de elementos de reserva es una de las características de la vida, lo mismo en los organismos individuales que en las especies. Es sabido cuál es la proporción entre las células reproductoras y los nuevos organismos que de ellas surgen y entre los organismos recién formados y los que llegan a la edad de procrear. En este caso la infalibilidad de un elemento es muy baja; sin embargo está compensada por un enorme excedente de elementos de reserva, de lo que resulta que una especie es un sistema de alta infalibilidad de supervivencia. Como se ve, el llamado derroche de la naturaleza del que se habla frecuentemente, es el factor que asegura una alta infalibilidad en la continuidad de las especies.

En el organismo individual un elevado número de elementos de reserva le confieren un alto grado de infalibilidad en su duración y funcionamiento. Tal reserva está constituida por la simetría en

la construcción anatómica de animales y humanos. Se puede ver con un sólo ojo, respirar con un sólo pulmón, vivir con un riñón o con una mitad del cerebro. El otro ojo, pulmón, riñón, son elementos de reserva (desgraciadamente hay un sólo corazón que es fuente de serios fallos en el organismo humano). Ocurre también que si falla cierto elemento en el organismo, las funciones de sustitución son asumidas por otros elementos que en principio no tienen el carácter de reserva; sin embargo, constituyen cierta reserva potencial. Así ocurre, por ejemplo, al dañarse ciertas partes del cerebro; las funciones localizadas en determinados lugares de la corteza cerebral son asumidas por otras partes, que resultan ser la reserva potencial [35].

Con especial claridad aparece el "principio de construcción" aludido al analizar los procesos económicos y su regulación. El proceso de producción que pasa por diversos estadios, desde la materia prima o el semiproducto en diferente grado de terminación, hasta el producto final, que se realiza en diferentes plantas de producción, es un ejemplo típico de un sistema compuesto por elementos acoplados en serie. Determinadas plantas o sus partes son los elementos y el acoplamiento es la colaboración entre las plantas y los departamentos de las mismas que se transmiten entre sí los productos correspondientes a diferentes etapas de la producción. El sistema que corresponde a tal proceso de producción puede representarse por medio del diagrama de bloques que aparece en la figura 57a.

[35] Este hecho constituye, con frecuencia, la base argumental de teorías biológicas filosóficas e idealistas. El hecho de que del huevo de un erizo de mar partido en dos se desarrolle un animal completo, sirvió a Hans Driesch como base para la conclusión de que el desarrollo de los organismos vivos está dirigido por una "entelequia" planificadora inmaterial. (Sobre este punto véase O. LANGE: *Calosc i rozwój w swietle cybernetyki*, Varsovia, 1962, pág. 82.) Del hecho de que a pesar de las lesiones sufridas por el cerebro las funciones mentales localizadas en la parte dañada con frecuencia siguen activas, Bergson sacó la conclusión de la independencia entre la mente y la base fisiológica material. Véase HENRI BERGSON: *L'énergie spirituelle*, París, 1920, quinta edición, págs. 55-58 y, del mismo, *Matière et mémoire*, París, 1914, 11 ed., págs., 125-128. En realidad estos fenómenos se explican como el resultado de que ciertas funciones son asumidas por otros elementos del sistema que constituyen la reserva potencial. Lo que es posible, gracias a que las fibras nerviosas corren paralelas muchas veces y casi siempre tienen terminaciones muy ramificadas, que llegan a varias partes del cerebro. Véase sobre este tema R. W. SPERRY: *Orderly Function with Disordered Structure*, en *Principles of Self-Organization*, ed. cit.

A cada elemento (planta o departamento) corresponde una infalibilidad determinada en función de la cual la infalibilidad de todo el proceso de producción es muy pequeña, tanto más pequeña cuantos más elementos acoplados en serie; es decir, cuanto más larga sea la cadena de la cooperación. Si falla un solo eslabón de esta cadena, el fallo perturba todo el proceso de producción; la probabilidad de la perturbación es tanto mayor cuanto mayor es el número de eslabones en la cadena de la cooperación.

La infalibilidad del proceso de producción se puede elevar a un nivel arbitrariamente alto, introduciendo un número adecuado de elementos de reserva. Estos elementos son reservas de materias primas, de piezas de repuesto y cierta potencia de reserva de máquinas, talleres de reparación eficaces, reservas de productos finales, etc. Estas reservas pueden considerarse como elementos acoplados en paralelo de manera alternativa; que son "movilizados" cuando falla un elemento imposibilitando la realización del proceso sin perturbaciones. El proceso de producción con reservas adecuadas responde al diagrama de bloques de la figura 60. Esto tiene gran importancia para la teoría y práctica de la planificación económica. La experiencia ha demostrado repetidas veces que la denominada planificación imperativa que propone altas metas productivas sin asegurar las reservas adecuadas del sistema de producción, es una planificación altamente falible. La "avería" de un solo elemento (por ejemplo una planta), causa perturbaciones en todo el proceso productivo, causando la quiebra de la cooperación. La planta *A* no entrega sus productos a la planta *B* que, en consecuencia, no puede suministrar los productos a la planta *C*, que no puede a su vez suministrar productos a la planta *D*, etc. La dificultad que se presenta en un eslabón de la cadena de la cooperación no puede localizarse y se transforma en una perturbación de todo el proceso de producción. Para localizar los fallos que se dan en determinados eslabones, son necesarias reservas que posibilitan la transmisión del producto a los eslabones siguientes (mantener las entregas) a pesar de las dificultades locales.

Otro caso importante del principio de construcción analizado es la regulación de los procesos económicos mediante una cadena de acciones intermedias. Por ejemplo, aumentando el precio de una

materia prima se eleva el coste del producto, lo que produce la disminución de la demanda, de la producción, del consumo de la materia prima y de su importación con el consiguiente ahorro de divisas. O bien: al iniciar una gran inversión (por ejemplo, la construcción de una planta productiva) en cierta localidad se da un aumento del empleo de la población local, inmigración de la población que busca empleo, un aumento de los ingresos y gastos monetarios, el crecimiento de la demanda de diversos bienes, cambios del modo de vida de la población, culturales, psicológicos, filosóficos, etc.

Los ejemplos enumerados de regulación del proceso económico y social a través de la cadena de acciones intermedias pueden

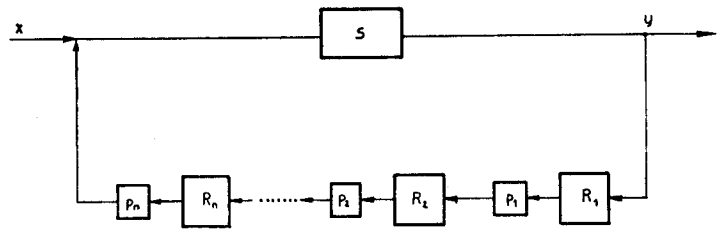


FIG. 62

considerarse como la introducción en el sistema de un regulador compuesto de un mayor número de elementos acoplados en paralelo (o lo que da lo mismo, mayor número de reguladores acoplados en serie), como lo ilustra la figura 62. Intervenimos en un sistema económico dado, que consideramos como el sistema regulado *S*, mediante los reguladores acoplados en serie $R_1, R_2, \ldots R_n$. Cada regulador se caracteriza por una infalibilidad determinada $p_1, p_2, \ldots, p_n$. El funcionamiento conjunto de los reguladores tiene, pues, la infalibilidad $P = p_1, p_2, \ldots p_n$. La fórmula fundamental de la regulación en este caso toma la siguiente forma:

$$y = \frac{S}{1 - PSR_n \ldots R_2R_1} x\,, \qquad [5.60]$$

donde *S* es el operador del sistema regulado, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ son los operadores de los reguladores, y $P = p_1, p_2, \ldots p_n$ es la infalibilidad conjunta de los reguladores. El valor medio (la esperanza matemá-

tica) del estado de la salida de la "cadena de los reguladores" es igual, como se ve, en $P_n R_n \dots R_2 R_1$. Este valor está determinado para cierto período τ.

Si la "cadena de reguladores" es larga, su infalibilidad conjunta P es pequeña y, por tanto, el valor medio de su acción (estado de salida) es pequeño. Decimos que el sistema de regulación "funciona débilmente", en determinados casos falla con frecuencia y en el período τ da un resultado medio pequeño. Para contrarrestarlo hay que conectar al sistema los reguladores alternativos de reserva acoplados en paralelo. El diagrama de bloque del sistema de regulación es el representado en la figura 63. En la fórmula [5.60] la infalibilidad conjunta de los reguladores toma el valor determinado por la fórmula [5.51] o [5.52] (si nos servimos de la infalibilidad media del regulador). Se le puede dar a dicha infalibilidad un nivel cercano a uno y por este medio asegurar un "funcionamiento fuerte" del sistema de los reguladores, crear una situación en la cual los fallos de la regulación sean muy raros y el resultado medio del funcionamiento de tal sistema (en el tiempo determinado τ) cercano a SR_n. $R_2 R_1$, es decir, al resultado alcanzado cuando todos los elementos del sistema de regulación funcionan con absoluta seguridad.

En los casos analizados; es decir, en el proceso productivo con la colaboración entre plantas y en la regulación del proceso económico por medio de la cadena de acciones intermedias, se puede lograr una alta infalibilidad por medio de las reservas adecuadas. Pero las reservas cuestan, significan la sustracción de parte de los medios a su participación directa en la producción, su "congelación". Esto es bien visible en el caso de la producción. En el caso de la cadena de acciones intermedias, por regla general los reguladores de reserva tienen el carácter de medios materiales de reserva para poner en marcha los estímulos económicos suplementarios (por ejemplo, cuando aumenta el precio de una materia prima, establecemos premios por ahorro de esa materia prima; cuando la disminución de la demanda de un producto lleva aparejada la disminución de su producción, reponemos a la fábrica las pérdidas eventuales causadas por la disminución de la producción), para facilitar un determinado tipo de actividad (por ejemplo, el suministro del pasto para la cría de ganado), etc. Se encuentran también relacionados con

ciertos gastos en la economía nacional. Se necesita un cálculo económico que compare el coste de las reservas suplementarias con el coste de averías del sistema; por ejemplo, con la pérdida que se produce en la economía nacional por perturbaciones en la realización del proceso productivo o por no alcanzar la meta económica que debía ser realizada por la cadena de acciones. Por medio del cálculo arriba descrito y de otros semejantes [36] se puede determinar la infalibilidad óptima —bien sea del proceso de la producción, bien sea de la cadena de acciones— y las reservas necesarias para obtener esta infalibilidad.

A falta de posibilidades para asegurar las reservas adecuadas y muy a menudo a consecuencia de la incomprensión de su importancia para un transcurso infalible de los procesos económicos (la idea de los "planes imperativos", "tareas movilizadoras", etc.) se buscan casi siempre otros caminos para aumentar la infalibilidad. Estos, los más frecuentes, consisten en "abreviar las cadenas"; o sea, en disminuir el número de elementos (o de conjuntos de elementos acoplados en serie).

En el proceso productivo esto se efectúa mediante la llamada concentración vertical de los procesos productivos; o sea, la realización de un mayor número de estadios en una planta productiva, lo que disminuye el número de fábricas y abrevia la cadena de cooperación entre las plantas. A medida que surgen dificultades de cooperación en la situación organizativa o por mala coordinación de la colaboración entre diferentes plantas (especialmente cuando estas plantas constituyen empresas separadas), la concentración vertical realmente puede aumentar la infalibilidad del transcurso de la producción. Como enseña la experiencia, esto conduce, por regla general, a la disminución de las reservas necesarias, lo que resulta de un menor número de elementos acoplados en serie. Hay unos límites para elevar la infalibilidad del proceso productivo por medio de la concentración vertical. Si no hubiese tales límites, la mayor infalibilidad podría alcanzarse reuniendo todas las plantas productivas (empresas) del país en una sola planta (empresa), lo que sería

[36] Se ha desarrollado toda una teoría de la programación en condiciones de inseguridad que se ocupa del cálculo de los óptimos de infalibilidad de los programas. La exposición de esta teoría se encuentra en el libro de O LANGE: *Optymalne decyzje.* Varsovia 1964, caps. VII, X y XI

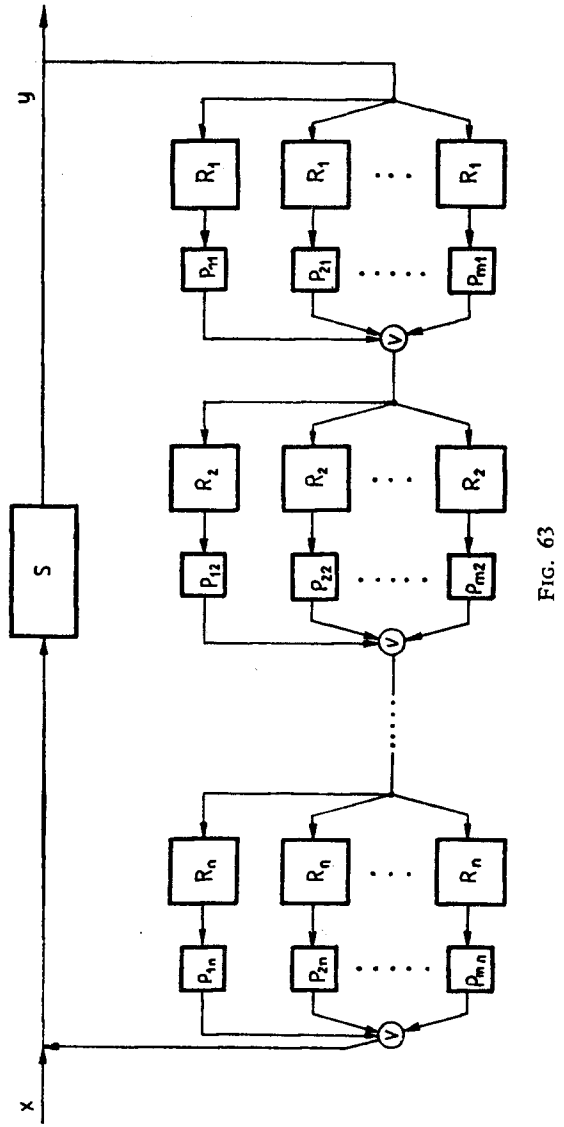


FIG. 63

una solución ficticia y no eliminaría las diferentes etapas técnicas del proceso de producción, la necesidad de transmitir el producto no terminado de un estadio a otro, las situaciones resultantes de la falibilidad de los estadios particulares causados por averías o por otros factores. Resumiendo: quedaría el problema de la cooperación dentro de una planta unida (empresa), entre sus departamentos quedarían también los problemas de organización (no solamente problemas técnico-productivos) de cooperación. La reducción de la cadena de cooperación es posible solamente dentro de ciertos límites, por lo tanto siempre son necesarias las reservas para asegurar un proceso productivo sin perturbaciones.

En el campo de la regulación de los procesos económicos, la tendencia a "reducir las cadenas" se manifiesta por lo general de dos formas. Una es la sustitución de los medios económicos de acción (que consisten en aplicar estímulos y crear situaciones favorables para la manifestación de determinadas iniciativas) por medios administrativos del tipo de órdenes, recomendaciones, restricciones, reglamentación de los suministros, reglamentación de los surtidos de producción, etc. El propósito de todo esto es sustituir la cadena falible de acción intermedia por medios más directos y pretendidamente más seguros. Otra forma es aumentar la centralización de las decisiones, transmitiendo la capacidad de decisión de los escalones más bajos a los más altos en la organización de los procesos económicos. Igualmente se trata aquí de alcanzar un funcionamiento más directo y seguro. No es por casualidad por lo que también el "acortamiento de las cadenas" en la dirección de los procesos económicos se da por regla general en los períodos de las "tareas urgentes" y de escasas reservas para asegurar su ejecución. Son los períodos de industrialización forzosa en los países socialistas cuando —tanto por razones sociales como políticas— se trata de sacar lo más pronto posible al país del estado de atraso económico y social heredado del pasado. En los países capitalistas se da un "acortamiento de las cadenas" similar durante la guerra con el sistema de la economía de guerra.

Dentro de ciertos límites los métodos del "acortamiento de las cadenas" en la regulación de los procesos económicos, pueden aumentar la infalibilidad de estos procesos y disminuir la necesidad

de reservas. Sin embargo, por regla general y más aún con una aplicación prolongada, dichos métodos producen tales efectos que no aumentan, y a veces incluso disminuyen, la infalibilidad del curso de los procesos económicos. Los métodos administrativos de regulación pierden efectividad cuando no están apoyados por los estímulos adecuados (o sea, los medios económicos) y tampoco pueden sustituir la iniciativa necesaria para asegurar a los procesos económicos la flexibilidad necesaria. No logran los efectos propuestos y surge el problema de la "lucha por la disciplina", de la observación de directivas administrativas, cuya efectividad es muy diversa.

La excesiva centralización de las decisiones crea sus problemas específicos que constituyen un objetivo importante del análisis cibernético. Por regla general alarga la cadena de transmisión de la información desde la "base" hasta la instancia autorizada a decidir. En el proceso de transmisión la información está sometida a cierta degeneración (deja de ser concreta, sufre deformaciones, etc.); comienza a funcionar la ley de disminución de la infalibilidad por el acoplamiento en serie de los elementos. Las informaciones en su camino desde la instancia superior hasta la "base" se hallan también sometidas a degeneración. Además, la instancia centralizadora tiene posibilidades limitadas de transformar la información en decisión (potencial de transformación en la unidad de tiempo). Las informaciones se acumulan esperando transformarse en decisiones, por lo cual las decisiones se atrasan. A esto se agrega el hecho de que a causa del alargamiento de la cadena de la transmisión de la información desde su "base hasta la central" y la transmisión de la decisión desde la "central hasta la base" se alarga el lapso de tiempo entre el envío de la información y la llegada de la decisión. Sucede entonces que la decisión llega demasiado tarde; o sea, cuando ya es inútil, ya que la situación es irreversible. En este caso el transcurso del proceso económico se vuelve incontrolable. La centralización de la decisión a altos niveles no lleva a dominar el proceso, sino al contrario, aumento su falta de control [37]. Al final

[37] Véase sobre este tema O. LANGE: *Rola planowania w gospodarce socjalistycznej*, en O. LANGE: *Pisma Ekonomiczne i Społeczné*, Varsovia 1962, pág. 137 y ss., y también O. LANGE: *Niektóre zagadnienia centralizacji i decentralizacji w zarzadzaniu*, "Materialy Prakseologiczne", núm. 1, 1962 (reproducción en el conjunto *Materialy do studiowania ekonomii politycznej socjalizmu*, Varsovia, 1964).

resulta que también este método de dirigir los procesos económicos tiene determinados límites.

Los problemas tratados muestran el importante papel de la cibernética para asegurar una eficaz e infalible organización de los procesos económicos y una efectiva, eficaz e infalible regulación del transcurso de estos procesos. Demuestran la importancia de la teoría general de la infalibilidad del funcionamiento de los sistemas, indicando también otros problemas (como la transmisión de información, la transmitancia de los órganos que toman las decisiones, que en esta conferencia no hemos mencionado). La cibernética resulta un instrumento imprescindible para dirigir la economía nacional; tanto para la planificación como para la regulación, adquiere un papel especial en las condiciones de la economía socialista. En la economía capitalista la organización de los procesos económicos se efectúa de manera incontrolada a causa principalmente de la existencia de la propiedad privada de los medios de producción y, por tanto, no puede fundamentarse en principios racionales. No hay tampoco una meta social general de la economía nacional, ni los medios de hacer compatible el funcionamiento de grandes potencias económicas privadas con esta meta eventual. En cambio, en la economía socialista la cibernética adquiere grandes posibilidades como instrumento científico fundamental para dirigir el desarrollo y el transcurso de los procesos económicos.

La importancia de la cibernética tiene aquí dos aspectos. Representa un aparato de análisis y cálculo exactos que asegura a la dirección de los procesos económicos la efectividad propuesta, la precisión y la infalibilidad. Pero aparte de la posibilidad de un análisis y cálculo exactos, la cibernética crea un modo específico —le denominaremos *razonamiento cibernético*—, de plantear, pensar, interpretar y revolver los problemas. Este razonamiento cibernético tiene importancia independientemente de los resultados de análisis y cálculos concretos, de manera similar a como lo tiene un modo matemático o estadístico de pensar. El que haya adquirido la habilidad del razonamiento cibernético sabrá —aun sin un análisis y cálculo minucioso— ver los problemas, las cadenas esenciales de las situaciones, los acoplamientos entre los elementos y

las direcciones de la solución práctica, que son indetectables para los demás. La posesión del razonamiento cibernético enriquece y profundiza la intuición imprescindible, lo mismo en investigaciones económicas científicas que en la práctica de la dirección de los procesos económicos: un resultado de considerable importancia.

BIBLIOGRAFIA

Allen, R. G. D.: *Mathematical Economics,* Londres-Nueva York 1957; traducción polaca *Ekonomia matematyczna,* PWN, Varsovia 1961.

Ashby, W. Ross: *Introducción a la cibernética.* Buenos Aires, Ed. Nueva Visión, 1960.

Ashby, W. Ross: *Proyecto para un cerebro.* Madrid, Ed. Tecnos, 1965.

Banasinski, A.: *Ubezpieczenia w Polsce Ludowej w liczbach,* PWE, Varsovia 1959.

Beer, S.: *Cybernetics and Management,* Londres 1959.

Bellman, R.; Cooke, K. C.: *Differential-Difference Equations,* Nueva York-Londres 1961.

Bergson, H.: *Matière et mèmoire,* París 1914, 11.ª ed. Hay trad. española 1900.

Bergson, H.: *L'énergie spirituelle,* París 1920, 5.ª ed. Hay trad. española 1921.

Bernstein, S. N.: *Teoria vieroiatnostiei,* Moscú-Leningrado 1934, 3.ª edición.

Bush, R. R. Mosteller, F.: *A Mathematical Model for Simple Learning,* "Psychological Review", 1951.

Clark, J. M.: *The Economics of Planning Public Works,* Washington 1935.

Chiksy, M. H.: *Feedback and Stability,* en el libro *Operations Research and System Engineering,* redactado por C. D. Flage, W. H. Huggin, R. H. Roy, Baltimore 1960.

Chorafas, D. N.: *Procesy statysticzne i niezawodnsc urzadzen,* Varsovia 1963.

Control Automático por varios especialistas del "Scientific American". Madrid, Rev. de Occidente, 1957.

Cowan, J.: *Many Valued Logics and Reliable Automata,* en el conjunto *Principles of Self-Organization,* Oxford-Londres 1962.

Culloch, W. C.: *The Reliability of Biological Systems,* en el conjunto *Self-Organizing Systems,* Oxford-Londres 1960.

El concepto de información en la ciencia contemporánea. (Coloquios de Royaumont), México, Siglo XXI, 1966.

Ellis, D. O.; Ludwig, F. J.: *Systems Philosophy,* Englewood Cliffs 1962.

Frisch, R., Holme, H.: *The Characteristic Solutions of a Mixed Difference and Differential Equation,* "Econometrica", 1935.

Glushkov, W. M.: *Sintez Cifrovej Avtomatov,* Moscú 1962.

Glushkov, W. M.: *Vviedienie v kibiernetiku,* Kiev 1964.

Gniedienko, B. W.: *Kurs teorii vieroiatnostiei,* Moscú-Leningrado 1950.
Golberg, S.: *Introduction to Difference Equations,* Nueva York-Londres 1958.
Greniewski, H.: *Cibernética sin matemáticas,* México, Fondo de Cultura Económica, 1965.
Greniewski, H.: *Zasady logiki indukcji,* PWN, Varsovia 1955.
Hughes, W. D.: *Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-Differential Equation,* "Journal of the London Mathematical Society", 1950.
Iwachnienko, A. G.: *Cybernetyka techniczna,* PWT, Varsovia 1964.
Khan, R. F.: *The Relation of Home Investment to Unemployment,* "The Economic Journal", 1931.
Kalecki, M. A.: *A Macrodynamic Theory of Bussines Cycles,* "Econometrica", 1935.
Kalecki, M.: *Prace z teorii koniunktury* 1933-1939, PWN, Varsovia 1962.
Kalecki, M.: *Próba teorii konyunktury,* Varsovia 1933.
Kalecki, M.: *Studies in Economic Dynamics,* Londres 1939.
Kalecki, M.: *Theory of Economic Dynamics,* Londres 1954; traducción polaca *Teoría dynamiki gospodarczej,* PWN, Varsovia 1958.
Kibiernetiku na sluzbu komunizmu, redactado por A. I. Berg, GEI, Moscú-Leningrado 1961.
La Cybernétique et le contrôle des systêmes économiques, "Cahiers de l'Institut des Sciences Economiques Appliquees", serie N, núm. 2, París 1958.
Lange, O.: *Calosc i rozwój w swietle cybernetyki,* PWN, Varsovia 1962.
Lange, O.: *Niektóre zagadnienia centralizacji i decentralizacji w zarzadzaniu,* "Materialy Prakseologiczne", núm. 1, 1962, reimpreso en el conjunto *Mateerialy do studiowania ekonomii politycznej socjalizmu,* K. y W., Varsovia 1964.
Lange, O.: *Optymalne decyzie. Zasady programowania,* PWN, Varsovia 1964.
Lange, O.: *Pisma ekonomiczne i spoleczne,* 1930-1960, PWN, Varsovia 1961.
Lange, O.: *Spoleczny proces produkcji i reprodukcji,* "Ekonomista", núm. 1, 1962.
Lange, O.: *Teoria reprodukcji i akumulacji,* PWN, Varsovia 1961, 2.ª ed., 1965.
Lange, O.: *Teoría statystyki,* parte I, PWG, Varsovia 1952.
Lange, O.: *Teoria statystyki,* parte II, PWN, Varsovia 1952, texto de conferencias.
Lange, O.: *Wstep do ekonometrii,* PWN, Varsovia 1962, 2.ª ed. Traducción esp. *Introducción a la econometría.* México, Fondo de Cultura Económica, 1964.
Lewin, B. R.: *Teoria suuchainej protsesov i ieio primienienie v radiotiejnikie,* Moscú 1960.
Marx, K.: *Kapital,* Varsovia 1950, t. I. Trad. esp. de Wenceslao Roces. "El capital. Crítica de la Economía Política", México, Fondo de Cultura Económica, 3 vols., 3.ª ed., 1964.
Maxwell, J. C.: *On Governors,* Proceeding of the Royal Society of London, 1868.
Moore, E. F., Shannon, C. E.: *Reliable Circuits Using Less Reliable Relays,* "Journal of the Franklin Institute", 1956, traducción rusa *Kiberneticheski sbornik,* Moscú 1960.
Moorhouse, N. F., Strolz, R. W., Horwitz, S. J.: *An Electro-Analogue Method for Investigating Problems in Economic Dynamic,* "Econometrica", 1950.
Neumann, J., von: *The Computer and the Brain,* New Haven 1958.
Niemchinov, W. S.: *Ekonomiko-matiematicheskievmetode i modieli,* Moscú 1962.
Operations Research and System Engineering, redactado por C. D. Flagle, W. H. Huggin, R. H. Roy, Baltimore 1960.
Parin, V. V., Baievski, R. M.: *Introducción a la cibernética y a la computación médicas,* México, Siglo XXI, 1969.
Phillips, A. W.: *Stabilization Policy in a Closed Economy,* "Economic Journal", Londres 1954.
Phillips, A. W.: *Stabilization Policy and the Time Form of Lagged Responses,* "Economic Journal", Londres 1954.
Rényi, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Berlín 1962.
Reza, F.: *A Note on Reliability Functions,* Proceedings of the 2nd Intternational Congress of Cybernetics, Namur 1960.
Simon, G. A.: *An Application of Servomechanism Theory to Production Control,* "Econometrica", 1952.
Sluckin, W.: *Mózg i maszyny,* Wiedza Powszechna, Varsovia 1957.
Smith, O. J., Erdley, J. M.: *An Electronic Analogue for an Economic System.* "Electrical Engineering", 1951, trad. rusa *Procese regulirovania v modieliaj ekonomicheskij sistem,* Moscú 1961.
Steindl, J.: *Servomechanism and Controllers in Economic Theory and Policy,* en *On Political Economy and Econometrics. Essays in Honour of Oskar Lange,* PWN, Varsovia 1964.
Szulc, S.: *Metody statystyczne,* Varsovia 1961, 2.ª ed.
Teoria regulacji automatycznej, PWNT, Varsovia 1962.
Trajtenbrot, B. A: *Introducción a la teoría matemática de las computadoras y de la programación,* México, Siglo XXI, 1967.
Tustin, A.: *The Mechanism of Economic Systems,* Londres 1953.
Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge im Vergleich zu Regelungs-

vorgängen der Technik, Munich 1957, trad. rusa *Procese regulirovania v modieliaj ekonomicheskij sistem,* Moscú 1961.
Wegrzyn, S.: *Podstawy automatyki,* PWN, Varsovia 1963.
Weryha, A.: *Statystyka teoretyczna,* t. I, Varsovia 1954.
Wiener, N.: *Cybernetics of Control and Communication in the Animal and the Machine,* París-Nueva York 1948.
Wiener, N.: *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Statistical Time Series,* Nueva York 1949.
Wulich, B. Z.: *Vviedienie v funkcionalnei analiz,* Moscú 1958.
Wunsch, G.: *Podstawy automatyki,* PWT, Varsovia 1960.

INDICE DE NOMBRES CITADOS

Allen, R. G. D.: 9, 136, 147.
Ashby W. Ross: 8.

Banasinski, A.: 1, 116.
Beer, S.: 9.
Bellman, R.: 37, 121, 147.
Berg, A. J.: 9.
Bergson, H.: 175.
Bernstein, S. N.: 157.
Bush, R. R.: 109.

Chiksy, M. H.: 136.
Chorafas, D. N.: 152, 169.
Clark, J. M.: 69, 70.
Cooke, K. C.: 121, 147.
Cowan, J.: 162.
Culloch, W. C.: 162.

Driesch, H.: 6, 175.

Ellis, D. O.: 162.
Engels, F.: 4.
Erdley, H. F.: 11, 147.

Flagle, C. D.: 136.
Frisch, R.: 147.

Glushkow, W. M.: 13, 162.
Gniedienko, B. W.: 157.
Goldberg, S.: 109.
Greniewski, H.: 22.

Holme, H.: 147.
Horwitz, S. J.: 11.
Huggin, W. H.: 136.
Hughes, N. D.: 147.

Iwachnienko, A. G.: 19.

Kahn, R. F.: 69, 70.
Kalecki, M.: 136, 137, 147, 148, 149, 150, 151.
Keynes, J. M.: 4, 27, 29, 30, 62, 69, 101.

Lange, O.: 2, 5, 6, 7, 11, 22, 56, 63, 90, 132, 133, 136, 151, 155, 157, 175, 179, 182.
Levin, B. R.: 170.
Ludwig, F. J.: 152.

Marx, K.: 4, 10, 54, 58, 62, 63, 64, 83, 132.
Maxwell, J. C.: 19.
Moore, E. F.: 162.
Moorhouse, N. F.: 11.
Mosteller, F.: 109.

Neumann, J.: 6, 13, 162.
Niemchinov, W. S.: 20.

Phillips, A. W.: 9.

Rényi, A.: 157.
Reza, F.: 162.
Roy, R. H.: 136.

Shannon, C. E.: 162.
Simon, A. G.: 9.
Sluckin, W.: 6.
Smith, A.: 10.
Smith, O. J. M.: 11, 147.
Sperry, R. W.: 175.
Steindl, J.: 9.
Strolz, R. H.: 11.
Szulc, S.: 155.

Tustin, A.: 9, 11, 136.

Walras, L.: 102.
Weryha, A.: 155.
Wegrzyn, S.: 5.
Wiener, N.: 5, 6, 9, 156.
Wulich, B. Z.: 76.
Wünsch, G.: 5.

INDICE ANALITICO

Acción reversiva, 21.
Aislador, 16.
Amortiguador, 16.
Amplificador, 25, 41.
Analogía estructural, 11.
Aparato para adelantamiento, 41.
Aparato para integrar (integrador), 41.
— de diferenciación (diferenciador), 41.
— de retrasamiento (retardante), 42.
— proporcional, 41.
Area de monotonía del sistema, 98.
— — estabilidad del sistema, 98.
— — inestabilidad del sistema, 98.
— — escitación del sistema, 98.
Autocontrol, 133.
Automática, 5, 151.
Autorregulación, 4, 6.
Autorregulación, sistema de, 3, 4.

Cadena de Markov, 109.
— — las acciones intermedias, 177.
— — los reguladores, 177.
Cerebros artificiales, 6.
Cibernética, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 183.
Circuito abierto de las acciones, 17.
— cerrado de las acciones, 17.
Coeficiente de disminución de las oscilaciones, 152.
— — consumo, 28.
— — variabilidad, 155.
Compensación (nivelación) de las desviaciones, 15.
— de las perturbaciones, 15.
Compensador, 16.
Componente de alimentación del sistema, 131.
— — transición del sistema, 131.
— propio del sistema, 131.
Constante de transformación, 40, 47.
Control, 4, 7, 8, 9, 19.
— adaptativo, 36.
— anticipado, 35.
Control extremal (óptimo), 37.
— complejo, 38.
— lineal, 45.
— programado, 33.
— rastreador, 33.
Controlador, 31.
Criterio del control, 38.
Coste de averías, 171.

Desviación de la acción del sistema, 154.
Desviación estática del sistema, 105.
Diferenciador, 41.
Disyunción incorrecta, 164.

Ecuación del aprendizaje, 109.
Ecuación de reacción del sistema, 121, 141.
Eficiencia (bondad) del funcionamiento del regulador, 108, 151.
Elementos (sistemas elementales), 52.
— de reserva, 162.
Eliminación de las perturbaciones, 16.
Entrada del sistema, 22.
Equilibrio estacionario, 131.
— final, 91.
— móvil, 131.
— periódico, 91.
Error del funcionamiento del sistema de la regulación, 154.
— casual del funcionamiento del sistema de la regulación, 154.
Error sistemático del sistema de la regulación, 105, 154.
Escudos, 16.
Esquema de bloques (estructural), 23.
— — los procesos dinámicos, 86.
— — la reproducción ampliada, 58.
— — — — — — simple, 54.
Estabilizador, 31, 104.

Estabilización (regulación simple), 31, 104.
Estado de equilibrio del sistema, 131.
Estructura de la motivación, 113.

Función de la entrada del sistema, 120.
— — — salida del sistema, 120.
Falibilidad del elemento, 157.
Fondo del seguro, 20, 115.

Homeóstasis, 6.

Incentivos (estímulos) positivos, 110.
— negativos (antiestímulos), 110.
Infalibilidad (funcionamiento) de los elementos, 157, 162.
— del regulador, 151.
— — sistema, 158.
Integrador, 41.
Intensidad de la motivación, 113.
Isomorfismo, 10.

Laissez faire, principio, 4.
Ley interna del movimiento, 132.
Límite del autocontrol del sistema, 134.
— de la estabilidad, 132.

Magnitud de alcance, 33.
— piloto, 33.
Máquina analógica, 11.
Máquinas matemáticas digitales, 12.
— — electrónicas, 5.
Matriz de Leontieff, 67, 71.
Modelo del ciclo de coyuntura (de Kalecki), 136.
Multiplicador de Keynes, 27, 50, 69, 86.
— (operador) de la retroacción, 27.

Norma del operador, 76.
— (valor propuesto) del estado de la salida del sistema de la regulación, 32.

Operadores, cálculo de, 39.
Operador de adelantamiento, 41.
— de la diferencia, 40.
— — las diferencias (creación de las diferencias limitadas), 41.
Operador elemental, 44, 52.
— lineal, 40.
— de la integración, 41.
— de la proporcionalidad, 40.
— — retrasamiento (retardamiento), 41.
— de la retroacción, 27, 48.
— resultante, 49.
— de la suma, 41.
— de la transformación, 40.
— — — — — inversa, 43, 52.

Persecución, curva de, 34.
— problema de, 33.
Potencia del regulador, 97.
— — sistema regulado, 97.
Precisión absoluta de la acción del regulador, 155.
— del funcionamiento del regulador (sistema), 151, 155.
— optimo, 148.
— relativa del funcionamiento del regulador, 155.
Probabilidad de reacción, 109.
Procesos, concentración vertical de los, 181.
Proceso continuo de la regulación, 100.
— de aprendizaje (herencia), 37.
— discreto, 100.
— estocástico, 109.
Programa del control, 32.
Punto de adición, 157.
Punto de disyunción, 158.

Razón de transformación del sistema, 25.
Razón de transformación de la regulación, 26.
Razón de transformación del operador, 45.
Razonamiento cibernético, 183.
Receptor, 17.
Reducción de la retroacción, 89.
Reductor, 25.

Regulación, 3, 9, 17. 24, 31, 117.
— automática, 3, 4, 15, 17.
— compleja, 19.
— controlada, 31.
— homeostática, 39.
— lineal, 45.
— simple (estabilización), 31.
Regulación, fórmula fundamental de la teoría de la, 25, 45, 78, 96, 122, 177.
Regulación, métodos complejos de la, 19.
Regulador, 16, 21.
— — de funcionamiento débil, 178.
— — de funcionamiento fuerte, 178.
— — Watt, 18.
Reserva cargada, 164.
Reserva descargada, 164.
Retraso de la acción del regulador (time lag), 95.
Retroacción (acoplamiento), 7, 17.
— alternativa, 163.
— compensadora, 97.
— acumulativa, 97.
— en paralelo, 46.
— en serie (de cascada), 47.
— negativa, 98.
— positiva, 98.
— reversiva, 21, 47.

Salida del sistema, 22.
Serie de Neumann, 70.
Servomecanismos, teoría, 5.
Simulador, 126.
Simulación, 12.
Sistema, 7.
— de regulación, 21.
— elemental, 52.
— estable, 81, 132.
— inestable, 81, 132.
— regulado, 21.
— regulante, 21.
— relativamente separado, 22.
— cibernético, características propias (internas), 133, 134, 151.
Sistemas de acoplamiento, 7.
Superposición de las acciones, 21.

Termostato automático, 14.
Timón, 31.
Transformación, 26.
Transformación idéntica. 43.
— inversa, 43, 53.
— nula, 53.
— proporcional, 25.

Valor absoluto (norma), del operador, 76.
— ajustador (alimentación), del sistema, 26, 31.
— dado (norma) del sistema, 31.
Velocidad de la acción del regulador, 152.

impreso en vox, s. a.
necaxa 24 - méxico 14, d. f.
dos mil ejemplares
17 de junio de 1977

Oskar Lange (1904-1965) es sin duda el más destacado economista polaco de nuestro siglo. Profesor de estadística en la Universidad de Cracovia ya en 1931, emigró más tarde a los EE. UU. por motivos políticos, dando clase de 1938 a 1945 en Stanford, California, y como catedrático de Teoría Económica en Chicago. Vuelto a su patria en 1945, ocupó diversos cargos diplomáticos. En 1956 fue nombrado catedrático de Economía Política en la Universidad de Varsovia y el año siguiente Presidente del Consejo de Estado de su país. De 1957 a 1959 actuó como Presidente de la Comisión Económica Europea de la O.N.U. y como consejero en diversas cuestiones de desarrollo económico y planificación en la India, Ceilán, Irak y Egipto. Publicó numerosos artículos y libros, de los cuales han sido traducidos a nuestro idioma «Economía Política I», «Introducción a la Econometría», «Problemas de Economía Política del Socialismo» y «La Economía en las Sociedades Modernas».

En la presente obra, dictada en forma de conferencias en la Universidad de Varsovia y publicada póstumamente, estudia Oskar Lange las posibilidades de aplicación de la cibernética y de la teoría de la regulación a los procesos económicos. Para ello plantea previamente los principios básicos de dicha teoría y explica su aplicación no sólo a los servomecanismos, sino especialmente a los problemas propios de la economía y al comportamiento de las ciencias en general, aplicación de especial utilidad en los países de economía planificada a escala nacional.

siglo veintiuno editores

MÉXICO
ESPAÑA
ARGENTINA
COLOMBIA

2ª edición

SIBUNA

BC049361

portada de Anhelo Hernández y Bartolomé Ruilán